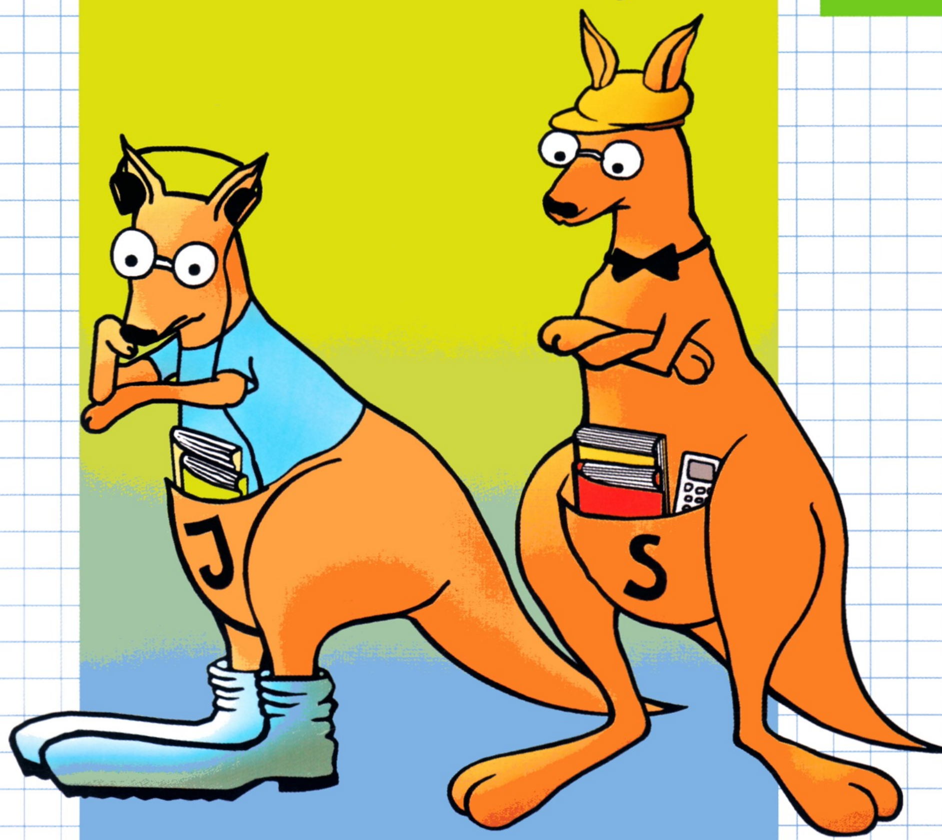
KENGŪRA 2011

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS
KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

IX–XII KLASĖS



КЕНГУРУ 2011
KANGUR 2011
KANGAROO 2011

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA 2011

JUNIORAS, SENJORAS

IX–XII KLASĖS

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Autorius-sudarytojas AIVARAS NOVIKAS

TEV

VILNIUS 2011

UDK 51(079.1)
Ke–108

Autorius-sudarytojas *Aivaras Novikas*

Redaktorius *Juozas Mačys*
Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*
Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Aldona Žalienė*
Konsultantas *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė http://www.tev.lt

ISBN 978–609–433–048–3

TURINYS

Pratarmė 4

Geriausiųjų sąrašai 6

Dalyvio kortelės pavyzdys 10

2011 m. konkurso užduočių sąlygos 11

Junioras (IX ir X klasės) 11

Senjoras (XI ir XII klasės) 15

Sprendimai 19

Junioras (IX ir X klasės) 19

Senjoras (XI ir XII klasės) 30

Atsakymai 43

PRATARMĖ

Paprastai žiūrint, „Kengūros“ konkursas tėra ne ką daugiau kaip 30, o jaunesnių klasių mokiniams dar mažiau (tiesa, labai nekasdienių) matematikos uždavinių, susitikimas su kuriais už sprendėjo suolo trunka nepilnas dvi akademines valandas. Ir viskas. Tik tiek.

Paprastai žiūrint, ir mūsų garsiausiojo alpinisto Vlado Vitkausko paskutinis metras įkopiant į Everestą irgi susidėjo ne iš šimto judesių, o kai kurie iš jų gal ir apskritai tebuvo tik krustelėjimai. Tiesa, tie krustelėjimai turėjo būti nežmoniškai sunkūs.

Tačiau kodėl tiek daug žmonių tų kopimų imasi į realius kalnus ir kodėl net per 5 milijonus vidurinės mokyklos mokinių kasmet pavasarį kopia į „Kengūros“ kalnelius? Kuo tie „Kengūros“ kalneliai tokie patrauklūs, kokios ten aukštumėlės atsiveria? Juk dabar jau nebeišsisuksi burbtelėjęs: „jie neturi kur dėtis, tai ir sprendinėja visokius uždavinukus“. Juk nepasakysi, kad milijonai taip jau ir neturi kur dėtis šitokioje „pramogų gadynėje“.

Ar tik ne todėl, kad tie milijonai gerai žino, jog baigiamajame kopime jų laukia, nors ir įveikiami, bet kartu ir labai gražūs, patrauklūs uždaviniai, kuriuos spręsdamas gali „užsikabinti“ pačia tauriausia to žodžio teikiama prasme? Kaip tai žinojo (o jei ne — tai sužinojo) per 60 000 Lietuvos mokinių, dalyvavusių konkurse 2011 metais. Juk konkursas — it žavus tornadas (o tokių irgi būna) — negriaudamas supurto įtemptą mokyklos dienų tėkmę ir pralėkęs palieka beveik nematomą, bet aiškų pėdsaką visų susidūrusių su juo vaizduotėse. Jo imi ilgėtis dažnai pats to nesuvokdamas — žymia dalimi būtent iš to ilgesio pamatyti paprastų, gražių bei viliojančių uždavinių ir atsiranda milijonai dalyvaujančiųjų.

75 lemtingos darbo minutės kiekvienų metų kovo mėnesio trečiąjį ketvirtadienį vainikuoja begalę įdėtų pastangų ir kruopštų triūsą, neįkyriai visam išminties trokštančiam pasauliui be paliovos įrodydamos, kad galvą laužyti prasmingai, kad ir matematikos užduotis besprendžiant, galima patiriant žaismingumą, spėliojimo azartą, žaibiškus, netikėtus proto nušvitimus.

Nepamirškime, kad vertinami yra tik konkurso dalyvių — 1–12 klasių „kengūriukų“ — atsakymai, o atsakymą kiekvienoje užduotyje reikia pasirinkti (ir kuo greičiau!) iš penkių duotųjų. Ar tikrai teisingas tas atsakymas, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo labiausiai tikėtinas? Ar tas uždavinys tikrai toks sunkus, kad verčiau jį praleisti? O gal tereikia pastebėti kokią smulkmeną, savaime nekrintančią į akis, ir uždavinys iš karto išsispręs? Ar pasėdėti prie šio uždavinio dar kelias minutes? O gal verčiau rizikuoti ir iš karto spėti labiausiai patinkantį atsakymą? Juk jei pataikysi — priklausomai nuo uždavinio sunkumo gausi 3, 4 ar 5 taškus, tačiau jei rizika nepasiteisins ir prašausi pro šalį — bus blogiau nei jei išvis jokio atsakymo nežymėtum. Mat už klaidingą atsakymą iš bendros taškų sumos su šaltu buhalteriniu tikslumu atimama ketvirtis to, kas būtų pridėta atsakius teisingai. (Visgi pastebėsime, kad į minusą nusiristi „Kengūros“ konkurse neįmanoma, nes kiekvienam mokiniui vien už dalyvavimą dosniai skiriama 30 taškų.)

Su panašiais klausimais konkurso dalyviai susiduria dažnai, nes „Kengūros“ uždavinių sprendimai būna gana netikėti, kviečiantys sprendėją padaryti atradimą — peršokti per standartinio mąstymo barikadas. Taip kinta milijonų sprendėjų požiūris į tai, kokia gi būna (šmaikšti) užduotis ir iš kelių minčių bei paprastų sakinių jau gali „sukristi“ jos sprendimas — štai jau, regis, net gali atskirti, už kurių sąlygos žodžių ar skaičių slapstosi tikrasis atsakymas.

Dabar stabtelėkime akimirkai ir paklausykime kelių žodžių iš „Kengūros“ gelmių Lietuvoje ir visame pasaulyje. Kas gi mums tą kasmetį viesulą siunčia?

Kaip nesunku nuspėti, konkurso idėja gimė ir labai sėkmingai rutuliojosi Australijoje, o Europoje ji ėmė sklisti iš Prancūzijos. Prancūzai suteikė „Kengūrai“ ir jos dabartinę organizacinę išvaizdą. Lietuvoje prie „Kengūros“ konkurso ištakų stovėjo ir labai daug nuveikė įvairios institucijos, mokyklos ir kitos savo gyvenimą švietimui paskyrusios organizacijos bei entuziastingi pradininkai. Kalbant šiek tiek žaismingiau, būtent jų galingomis pastangomis grakštaus bei efektyvaus mokymo simboliu tapęs gyvūnas su visa savo mokslo kariauna ir buvo atviliotas ir, drįstame tai sakyti nedvejodami, negrįžtamai atšuoliavo pas mus bei įsikūrė Nemuno žemėje.

Tarp sumaniai į Lietuvą „Kengūros“ konkursą viliojusių institucijų pirmiausiai minėtini Švietimo ir mokslo ministerija, Matematikos ir informatikos institutas bei Vilniaus universitetas, o nenutylint žmonių pirmiausiai reikėtų paminėti — čia būtent tas atvejis, kai nutylėti būtų nepadoru — Lietuvos matematikos olimpiadų patriarchą Juozą Juvencijų Mačį bei ŠMM vyriausiąją matematikos specialistę Marytę Skakauskienę.

O šiaip, „Kengūrai“ nuolat mūsų gyvenime randantis, viskas vyksta kaip visur, kur rimtai dirbama. Ir „Kengūros“ ratas sukasi kiaurus metus — net vasaromis, kai, atrodytų, tik atostogos, geriausiai konkurse pasirodžiusieji mokiniai kviečiami į stovyklas, kur gali dalyvauti tiek sportiniuose, tiek „kengūriniuose“ (matematiškai sportiniuose), tiek kituose smagiuose renginiuose. O rudenį ekspertai, suvažiavę iš viso pasaulio, renka uždavinius konkursui, per žiemą jie verčiami į dešimtis kalbų, adaptuojami ir pritaikomi taip, jog kartais atrodo, kad jie sugalvoti kaimyniniame miestelyje. Vien Lietuvoje „Kengūra“ kalba keturiomis pagrindinėmis kalbomis: lietuvių, lenkų, rusų ir anglų.

Tik taip, nepastebimai bei nenuleidžiant rankų, ir gali užgimti konkursas, keičiantis jo dalyvių požiūrį į matematiką. Tik tai ir teparodo, kaip moderniam žmogui duoti deramą pasirengimą dar modernesnei mus užgriūnančiai ateičiai, į kurią jam lemta žengti.

Šis kelias neišvengiamas — juo teks eiti. Eiti bus įdomu, kartais šiek tiek baugu, gal net sunku — bet jo vingiai įveikiami, o jį pasirinkusiųjų užmojai stebinantys.

Kas gi mūsų laukia kelionėje? Šioje knygelėje pateikti konkurso uždaviniai, pro kuriuos 2011 metų kovo 17 dieną keliavo ir gausiai sprendė IX–X klasių („Junioro“ amžiaus grupė) ir XI–XII klasių („Senjoro“ amžiaus grupė) mokiniai. Be to, norintieji pasitikrinti, ar jie tikrai gerai sprendė, panūdusieji pasižiūrėti, kaip dar galima spręsti šiuos uždavinius arba kaip juos pajėgia spręsti jų pateikėjai, knygelėje ras ir visų uždavinių atsakymus su sprendimais.

Kaip jau seniai visi žino, norint rasti ar pasirinkti teisingą atsakymą iš penkių duotųjų, ne visada būtina griežtai išspręsti uždavinį ar kaip kitaip perkratyti visą pasaulio išmintį, todėl ir knygelėje pateikiami kai kurių uždavinių ne tik griežti matematiniai sprendimai (jie žymimi ženklu **!**), bet ir jų „kengūriniai“ sprendimai, paaiškinantys, kaip nusigauti iki teisingo atsakymo, uždavinio iki galo taip ir neišsprendus (tokie sprendimai-nusigavimai pažymėti ženklu **?**). Kai vienokių ar kitokių sprendimo būdų yra daugiau nei vienas, jie žymimi ženklais **??**, **!!**, **!!!** ir pan. Nors konkurse-žaidime pakanka klaustuku pažymėto sprendimo, tikimės, kad matematikos galvosūkių sportu užsikrėtusiam skaitytojui nebus svetimas ir azartas išsiaiškinti viską iki galo bei pereiti uždavinio lynu be penkių atsakymų apsaugos.

Tad kviečiame keliauti ir pavaikštinėti juo kartu su „Kengūra“ — išmėginti turimas jėgas bei žadinti savo kūrybines galias, kurių jūs, mielas skaitytojau, šitiek daug turite!

Romualdas Kašuba

Junioras, 9 klasė, 50 geriausiųjų

Mykolas Blažonis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 131,25
Ignas Urbonavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 126,25
Mindaugas Narušis, Marijampolės Sūduvos gimnazija, Marijampolės sav., 117,50
Daniel Juranec, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 114,75
Karolis Lipskis, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 108,75
Vytautas Šlenfuktas, Vilkaviškio „Aušros“ gimnazija, Vilkaviškio r., 103,75
Denis Michailovskij, „Ąžuolyno“ gimnazija, Klaipėdos m., 101,25
Justas Klimavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 100,75
Simona Pociūtė, Kėdainių „Šviesioji“ gimnazija, Kėdainių r., 100,25
Ugnius Beinorius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 100,00
Lukas Bernotas, Jėzuitų gimnazija, Vilniaus m., 99,00
Donata Bankauskaitė, Pivašiūnų vidurinė mokykla, Alytaus r., 98,75
Olga Zadorožnaja, „Juventos“ gimnazija, Vilniaus m., 98,75
Gabija Stankevičiūtė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 98,25
Evelina Fronska, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 97,50
Liutauras Valaitis, „Saulės“ gimnazija, Kauno m., 97,50
Jokūbas Ruibys, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 95,75
Simonas Kireilis, Marijampolės Marijonų gimnazija, Marijampolės sav., 95,75
Paulius Jonaitis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 95,50
Vytautas Šiugžda, „Varpo“ gimnazija, Kauno m., 95,00
Ernest Giedzievič, Dieveniškių Adomo Mickevičiaus vidurinė mokykla, Šalčininkų r., 94,75
Erika Rukšėnaitė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 94,25
Karolis Butvitis, Jurbarko Antano Giedraičio-Giedriaus gimnazija, Jurbarko r., 93,75
Liudvika Sidorukaitė, „Ąžuolyno“ gimnazija, Klaipėdos m., 93,75
Titas Bučelis, Abraomo Kulviečio vidurinė mokykla, Vilniaus m., 93,75
Mindaugas Dadurkevičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 93,50
Tomas Mackus, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 92,75
Greta Pyrantaitė, Akademijos Ugnės Karvelis gimnazija, Kauno r., 92,50
Greta Stončiūtė, Kaltinėnų Aleksandro Stulginskio gimnazija, Šilalės r., 92,50
Audronė Čepulytė, Simono Daukanto gimnazija, Šiaulių m., 91,25
Donatas Vertelis, Alsėdžių vidurinė mokykla, Plungės r., 91,25
Indrė Davainytė, VšĮ Kauno Juozo Urbšio katalikiška vidurinė mokykla, Kauno m., 91,25
Lukas Grinkevičius, „Ąžuolyno“ gimnazija, Klaipėdos m., 91,25
Oleg Kiba, Vasilijaus Kačialovo gimnazija, Vilniaus m., 91,25
Ema Kvietkauskaitė, Ukmergės Antano Smetonos gimnazija, Ukmergės r., 90,50
Andrius Petkus, Tauragės „Versmės“ gimnazija, Tauragės r., 90,25
Lukas Jonuška, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 90,00
Eduardas Jeriomenko, Žirmūnų gimnazija, Vilniaus m., 89,75
Edvin Orlov, Abraomo Kulviečio vidurinė mokykla, Vilniaus m., 88,75
Rokas Kovalenkovas, Mažeikių Merkelio Račkausko gimnazija, Mažeikių r., 88,75
Rytis Kančys, Miroslavo vidurinė mokykla, Alytaus r., 88,75
Rokas Šatinskas, Kupiškio Lauryno Stuokos-Gucevičiaus gimnazija, Kupiškio r., 88,50
Tomas Markevičius, Žirmūnų gimnazija, Vilniaus m., 88,50
Raimundas Vitkauskas, Trakų Vokės vidurinė mokykla, Vilniaus m., 88,25
Tautvydas Neliupšis, Tuskulėnų vidurinė mokykla, Vilniaus m., 88,00
Gabrielė Berniūtė, Kretingos Marijono Daujoto vidurinė mokykla, Kretingos r., 87,50
Gvidas Janušonis, Pasvalio Petro Vileišio gimnazija, Pasvalio r., 87,50
Justinas Puodžiukas, Jonavos Senamiesčio gimnazija, Jonavos r., 87,50
Kipras Gajauskas, „Varpo“ gimnazija, Kauno m., 87,50
Paulius Jomantas, „Purienų“ vidurinė mokykla, Kauno m., 87,50
Tomas Grakalskis, Žvėryno gimnazija, Vilniaus m., 87,50
Urtė Mockevičiūtė, Simono Daukanto gimnazija, Šiaulių m., 87,50

Junioras, 10 klasė, 50 geriausiųjų

Paulius Žilinskas, VšĮ Jėzuitų gimnazija, Kauno m., 132,50
Daumantas Kavolis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 122,50
Vidas Frankauskas, Panoterių Petro Vaičiūno pagrindinė mokykla, Jonavos r., 116,00
Kamilė Rastenytė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 112,00
Mykolas Karpavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 108,50
Mykolas Gustas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 108,50
Petras Jaugėla, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 107,50
Džiugas Vyšniauskas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 107,25
Aistė Osinskytė, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 106,00
Vladimir Daglis, „Santaros" vidurinė mokykla, Vilniaus m., 105,25
Dalius Jonaitis, Mažeikių Merkelio Račkausko gimnazija, Mažeikių r., 105,00
Vaidas Vilda, Mykolo Biržiškos gimnazija, Vilniaus m., 105,00
Deividas Pelenis, Kelmės „Aukuro" vidurinė mokykla, Kelmės r., 104,75
Karolis Greblikas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 103,75
Marijus Adomaitis, Raseinių „Žemaičio" gimnazija, Raseinių r., 103,00
Domas Nutautas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 102,50
Justas Rupšys, „Romuvos" gimnazija, Šiaulių m., 102,50
Aurelija Valantonytė, Karmėlavos Balio Buračo gimnazija, Kauno r., 102,25
Karmela Blank, Šolomo Aleichemo vidurinė mokykla, Vilniaus m., 102,25
Karolis Bartkus, „Aukuro" gimnazija, Klaipėdos m., 102,00
Mykolas Jasponis, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 102,00
Žygimantas Stražnickas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 101,50
Andrius Karužas, Juodšilių „Šilo" gimnazija, Vilniaus r., 101,25
Liudas Mažeika, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 101,25
Tomas Vaškevičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 101,00
Paulina Kaziukonytė, Mykolo Biržiškos gimnazija, Vilniaus m., 100,50
Benas Jacikas, Tauragės Žalgirių gimnazija, Tauragės r., 100,00
Edgaras Simanavičius, Jurbarko Antano Giedraičio-Giedriaus gimnazija, Jurbarko r., 100,00
Aivaras Paliulis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 98,75
Jurgita Rinkevičiūtė, Mykolo Biržiškos gimnazija, Vilniaus m., 98,75
Marius Latinis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 98,75
Rokas Liolaitis, Pagėgių Algimanto Mackaus gimnazija, Pagėgių sav., 98,75
Rokas Gybėnas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 98,75
Žilvaras Vasiliauskas, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 98,75
Šarūnas Trinkūnas, Utenos Adolfo Šapokos gimnazija, Utenos r., 98,50
Tomas Baškys, Stasio Šalkauskio gimnazija, Šiaulių m., 98,25
Rapolas Daugintis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 98,00
Konstantinas Steponavičius, Trakų Vytauto Didžiojo gimnazija, Trakų r., 97,25
Vladislovas Čižas, Lukiškių vidurinė mokykla, Vilniaus m., 96,50
Algirdas Jasinskas, Žirmūnų gimnazija, Vilniaus m., 96,25
Karolis Žitkevičius, „Ąžuolyno" gimnazija, Klaipėdos m., 96,25
Paulius Rekašius, Telšių „Kranto" vidurinė mokykla, Telšių r., 96,25
Darius Bogdanov, Sofijos Kovalevskajos vidurinė mokykla, Vilniaus m., 95,50
Karolis Jasinevičius, Obelių gimnazija, Rokiškio r., 95,00
Paulius Jonušas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 95,00
Sergej Pašuk, Naujamiesčio vidurinė mokykla, Vilniaus m., 95,00
Linas Pugžlys, Simono Daukanto gimnazija, Vilniaus m., 94,75
Mantas Beginskas, Stepono Dariaus ir Stasio Girėno gimnazija, Kauno m., 94,75
Arnas Bendaravičius, Antano Smetonos gimnazija, Kauno m., 94,50
Diana Vežbovič, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 94,50
Greta Narkevičiūtė, „Minties" gimnazija, Panevėžio m., 94,50

Senjoras, 11 klasė, 50 geriausiųjų

Linas Klimavičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 116,25
Kęstutis Vilčinskas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 112,00
Simonas Mamaitis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 106,75
Vykintas Baltrušaitis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 100,25
Kornelija Rutkauskaitė, Druskininkų „Ryto" gimnazija, Druskininkų sav., 97,25
Gleb Zamarajev, Vasilijaus Kačialovo gimnazija, Vilniaus m., 97,00
Jekaterina Mironova, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 95,75
Karolis Lasickas, „Ąžuolyno" gimnazija, Klaipėdos m., 94,00
Augustinas Juškauskas, Kuršėnų Lauryno Ivinskio gimnazija, Šiaulių r., 91,75
Karolis Leskauskas, Jotvingių gimnazija, Alytaus m., 90,25
Algė Šalkauskaitė, Jono Jablonskio gimnazija, Kauno m., 88,75
Tomas Rimkus, „Saulės" gimnazija, Kauno m., 88,50
Odeta Juodžiukynaitė, VšĮ Šv. Benedikto gimnazija, Alytaus m., 87,50
Giedrė Eidimtaitė, Plungės Senamiesčio vidurinė mokykla, Plungės r., 87,00
Simonas Stepanovas, Pandėlio gimnazija, Rokiškio r., 86,75
Dainius Kučinskas, Rietavo Lauryno Ivinskio gimnazija, Rietavo sav., 85,00
Edvinas Kurauskas, Martyno Mažvydo vidurinė mokykla, Kauno m., 84,75
Ignas Rimkus, Akademijos Ugnės Karvelis gimnazija, Kauno r., 84,75
Povilas Žemaitis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 84,75
Evgenij Zdorovets, „Žaliakalnio" gimnazija, Klaipėdos m., 84,25
Tomas Zamaliauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 83,75
Gabija Stremaitytė, Griškabūdžio vidurinė mokykla, Šakių r., 83,00
Daniel František Aleksiuk, Vasilijaus Kačialovo gimnazija, Vilniaus m., 82,25
Laimonas Ratkevičius, Šilutės Vydūno gimnazija, Šilutės r., 82,00
Ugnė Ringelevičiūtė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 82,00
Gabija Gorodeckytė, Užupio gimnazija, Vilniaus m., 81,75
Jevgenij Nedorezov, Gerosios Vilties vidurinė mokykla, Vilniaus m., 81,25
Karolina Jankovska, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 81,25
Rimgaudas Stundžia, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 81,25
Rytis Stankus, „Ąžuolyno" gimnazija, Klaipėdos m., 81,25
Tomaš Voinič, Bezdonių Julijaus Slovackio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 81,25
Justas Stasaitis, „Ąžuolyno" gimnazija, Klaipėdos m., 80,25
Anastasija Chadži, „Aitvaro" gimnazija, Klaipėdos m., 80,00
Dalius Mirklys, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 79,75
Pavel Gusev, „Aitvaro" gimnazija, Klaipėdos m., 79,75
Dorota Leščevska, Sužionių vidurinė mokykla, Vilniaus r., 79,00
Viktė Vitkevičiūtė, Tauragės Žalgirių gimnazija, Tauragės r., 79,00
Juliana Gaidamovič, Lukiškių vidurinė mokykla, Vilniaus m., 78,75
Sandra Kvedaraitė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 78,50
Beatričė Zalbaitė, VšĮ Vytauto Didžiojo universiteto „Rasos" gimnazija, Kauno m., 78,00
Eimantas Markūnas, Karoliniškių gimnazija, Vilniaus m., 78,00
Martynas Melninkas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 78,00
Ieva Daužickaitė, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 77,75
Santa Švelnytė, Lygumų vidurinė mokykla, Pakruojo r., 77,50
Gvidas Bražionis, Žemynos gimnazija, Vilniaus m., 77,25
Mantas Minkauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 76,50
Artūr Vasilevski, Jašiūnų „Aušros" vidurinė mokykla, Šalčininkų r., 76,25
Giedrius Sirevičius, Martyno Mažvydo vidurinė mokykla, Kauno m., 76,25
Matas Dijokas, Šilutės Vydūno gimnazija, Šilutės r., 76,25
Rokas Kazlauskas, „Ąžuolyno" gimnazija, Klaipėdos m., 76,25
Rokas Valiukas, Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazija, Kretingos r., 76,25

Senjoras, 12 klasė, 50 geriausiųjų

Aleksandras Smoliakovas, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 121,25
Gluosnė Norkutė, Lietuvos aklųjų ir silpnaregių ugdymo centras, Vilniaus m., 114,50
Marijonas Petrauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 109,50
Benas Kikutis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 104,75
Simas Rimgaila, Mosėdžio gimnazija, Skuodo r., 102,50
Ugnė Gudžinskaitė, Jėzuitų gimnazija, Vilniaus m., 100,00
Vladas Jurkevičius, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 97,25
Joana Leonovič, Maišiagalos Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 96,25
Neringa Mažulytė, Didždvario gimnazija, Šiaulių m., 96,25
Aistis Stramkauskas, Varėnos „Ąžuolo" vidurinė mokykla, Varėnos r., 96,00
Arnoldas Šidlauskas, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 96,00
Balys Momgaudis, Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazija, Kretingos r., 96,00
Mantas Račiūnas, Skaudvilės gimnazija, Tauragės r., 96,00
Agnė Misiūtė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 94,25
Gabija Bačiūtė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 93,75
Agnė Zilnytė, Stepono Dariaus ir Stasio Girėno gimnazija, Kauno m., 93,50
Daumantas Stanikūnas, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 91,75
Rokas Martinkus, Juozo Balčikonio gimnazija, Panevėžio m., 91,00
Vytautas Smilingis, Eduardo Balsio menų gimnazija, Klaipėdos m., 88,75
Karolis Juodelė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 88,25
Armantas Vaškelis, Garliavos Jonučių vidurinė mokykla, Kauno r., 88,00
Dovydas Kubaitis, Šilalės Simono Gaudėšiaus gimnazija, Šilalės r., 88,00
Artur Rubcov, Sofijos Kovalevskajos vidurinė mokykla, Vilniaus m., 87,50
Karolis Janulionis, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 87,50
Olga Negri, „Gerosios vilties" vidurinė mokykla, Visagino m., 87,50
Rasa Platakytė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 87,00
Mangirdas Rasiulis, Juliaus Janonio gimnazija, Šiaulių m., 86,75
Jorinta Jakubauskaitė, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 86,25
Vygantas Sasnauskas, Troškūnų Kazio Inčiūros vidurinė mokykla, Anykščių r., 86,25
Martynas Byla, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 85,25
Martynas Bendikas, Tauragės „Versmės" gimnazija, Tauragės r., 85,25
Diana Geršvaltaitytė, Lukšių Vinco Grybo gimnazija, Šakių r., 85,00
Jurij Sinickij, Dieveniškių „Ryto" vidurinė mokykla, Šalčininkų r., 85,00
Kiril Kovbasiuk, „Juventos" gimnazija, Vilniaus m., 85,00
Lukas Marcinkevičius, Žvėryno gimnazija, Vilniaus m., 85,00
Domas Družas, Krekenavos Mykolo Antanaičio gimnazija, Panevėžio r., 84,75
Vainius Ūdra, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 84,00
Justinas Kluonaitis, VšĮ Kauno technologijos universiteto gimnazija, Kauno m., 83,75
Karolis Šomka, VšĮ „Saulės" privati gimnazija, Vilniaus m., 83,75
Lauryna Kriščiūnaitė, Gruzdžių gimnazija, Šiaulių r., 83,75
Artūras Volkovas, Jono Jablonskio gimnazija, Kauno m., 83,25
Tomas Kryžius, Mažeikių Merkelio Račkausko gimnazija, Mažeikių r., 83,25
Tomas Krikštaponis, Jėzuitų gimnazija, Vilniaus m., 83,25
Aras Dapkus, Vilniaus licėjus, Vilniaus m., 83,00
Antanas Palaitis, Salomėjos Nėries gimnazija, Vilniaus m., 82,75
Vilius Pranckaitis, „Ąžuolyno" gimnazija, Klaipėdos m., 82,75
Arnoldas Tamošiūnas, Maišiagalos Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 82,50
Robert Kabelis, Maišiagalos Juzefo Obrembskio vidurinė mokykla, Vilniaus r., 82,50
Juozas Rimgaila, Palangos senoji gimnazija, Palangos m., 82,25
Žygimantas Jakeliūnas, Molėtų gimnazija, Molėtų r., 81,75



Tarptautinis matematikos konkursas KENGŪRA

Dalyvio kortelė

KAIP UŽPILDYTI DALYVIO KORTELĘ

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite pieštuku.
2. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
3. Nurodytoje vietoje įrašykite savo *mokyklos šifrą* (jį Jums pasakys mokytojas) ir *pavadinimą*.
4. Kryželiu atitinkamuose langeliuose pažymėkite, kuria *kalba* ir kurioje *klasėje* mokotės (gimnazijos klasės - G1, ... , G4).
5. Žemiau nurodytoje vietoje didžiosiomis spausdintinėmis raidėmis įrašykite savo *vardą* ir *pavardę*.

Pavyzdys: **Pavardė** **P A V A R D E N I S**

6. Išsprendę testo uždavinį, nurodytoje šios kortelės vietoje pažymėkite tik vieną pasirinktą atsakymą.

Žymėjimo kryželiu pavyzdys: ☒

ATSAKYMŲ DALIS

Mokyklos šifras

Mokyklos pavadinimas

Kalba

Lietuvių	☐
Lenkų	☐
Rusų	☐
Anglų	☐

Klasė	Nykštukas		Mažylis		Bičiulis		Kadetas		Junioras		Senjoras	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9(G1)**	**10(G2)**	**11(G3)**	**12(G4)**
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vardas

Pavardė

Uždavinių atsakymai

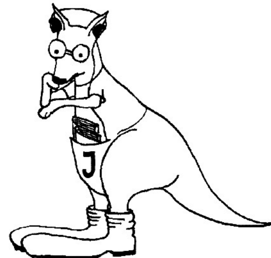
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	☐	☐	☐	☐	☐	**7**	☐	☐	☐	☐	☐	**13**	☐	☐	☐	☐	☐	**19**	☐	☐	☐	☐	☐	**25**	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐	**8**	☐	☐	☐	☐	☐	**14**	☐	☐	☐	☐	☐	**20**	☐	☐	☐	☐	☐	**26**	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐	**9**	☐	☐	☐	☐	☐	**15**	☐	☐	☐	☐	☐	**21**	☐	☐	☐	☐	☐	**27**	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐	**10**	☐	☐	☐	☐	☐	**16**	☐	☐	☐	☐	☐	**22**	☐	☐	☐	☐	☐	**28**	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐	**11**	☐	☐	☐	☐	☐	**17**	☐	☐	☐	☐	☐	**23**	☐	☐	☐	☐	☐	**29**	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐	**12**	☐	☐	☐	☐	☐	**18**	☐	☐	☐	☐	☐	**24**	☐	☐	☐	☐	☐	**30**	☐	☐	☐	☐	☐

PASTABOS

1. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o už klaidingą atsakymą atimama 25% uždavinio taškų.
2. KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI IR GLAMŽYTI.
3. Atlikę užduotį, konkurso organizatoriams grąžinkite tik šią kortelę. Sąlygų lapelis ir sprendimai lieka Jums.

2011 m. konkurso užduočių sąlygos

JUNIORAS (IX ir X klasės)

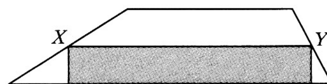


KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

J1. Pėsčiųjų perėja per gatvę nudažyta pakaitomis einančiomis baltomis ir juodomis juostomis. Kiekvienos juostos plotis yra 50 cm. Perėja prasideda ir baigiasi balta juosta, o iš viso joje yra 8 baltos juostos. Koks yra gatvės plotis?

A) 7 m **B)** 7,5 m **C)** 8 m **D)** 8,5 m **E)** 9 m

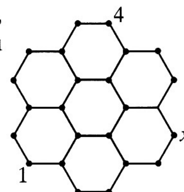
J2. X ir Y yra pavaizduotos trapecijos šoninių kraštinių vidurio taškai, o užtušuoto stačiakampio plotas lygus $13\,\text{cm}^2$. Kam lygus trapecijos plotas (cm^2)?
A) 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 28



J3. Duota, kad $P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$, $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$ ir $R = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$. Kuris iš šių teiginių teisingas?

A) $Q < P < R$ **B)** $P < Q = R$ **C)** $P < Q < R$ **D)** $R < Q < P$ **E)** $P = Q < R$

J4. Prie kiekvieno pavaizduotos gardelės mazgo reikia parašyti po skaičių taip, kad bet kurios atkarpėlės galuose esančių skaičių suma būtų ta pati. Du skaičiai jau parašyti. Kokį skaičių teks parašyti vietoj x?
A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** Trūksta informacijos



J5. Kiek yra tokių natūraliųjų skaičių n, kad dalijant 31 iš n liekana yra lygi 7?

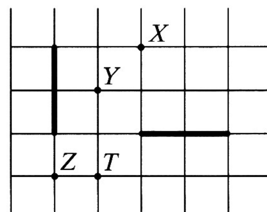
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

J6. Stačiakampė mozaika, sudėta iš vienodo dydžio kvadratinių plytelių, užima $360\,\text{cm}^2$ plotą. Mozaika yra 24 cm aukščio ir 5 plytelių pločio. Kam lygus vienos plytelės plotas (cm^2)?

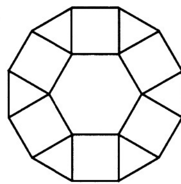
A) 1 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 16 **E)** 25

J7. Visi keturženkliai skaičiai, kurių skaitmenų suma lygi 4, surašyti mažėjimo tvarka. Kelintas iš eilės šiame sąraše yra skaičius 2011?
A) 6-tas **B)** 7-tas **C)** 8-tas **D)** 9-tas **E)** 10-tas

J8. Pasukus bet kurią iš dviejų paryškintų atkarpų apie tam tikrą tašką (posūkio centrą), ji sutaps su kita iš šių atkarpų. Kurie iš pažymėtųjų taškų gali būti tokio posūkio centrais?
A) Tik X **B)** Tik X ir Z **C)** Tik X ir T **D)** Tik T
E) X, Y, Z ir T



J9. Pavaizduotoji geometrinė figūra sudaryta iš taisyklingojo šešiakampio su vienetinio ilgio kraštinėmis, šešių lygiakraščių trikampių ir šešių kvadratų. Kam lygus figūros perimetras?



A) $6(1+\sqrt{2})$ **B)** $6+3\sqrt{3}$ **C)** 12 **D)** $6+3\sqrt{2}$ **E)** 9

J10. Trys lošimo kauliukai, kurių kiekvieno bet kurios dvi priešingos sienelės kartu turi 7 akutes, pastatyti vienas ant kito. Abi dviejų suglaustų sienelių akučių sumos lygios 5. Apatinio kauliuko priekinėje sienelėje yra viena akutė. Kiek akučių yra viršutinio kauliuko viršutinėje sienelėje?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

J11. Po mėnesio, kurio tik 4 dienos buvo sekmadieniai, ėjo kitas mėnuo, kurio 5 dienos buvo pirmadieniai, 5 – antradieniai ir 5 – trečiadieniai. Todėl po jų ėjusių trečią mėnesį buvo:

A) lygiai 4 penktadieniai **B)** lygiai 4 šeštadieniai **C)** 5 sekmadieniai **D)** 5 trečiadieniai **E)** Taip negalėjo būti

J12. Automobilių lenktynėse dalyvavo trys sportininikai: Michaelis, Fernandas ir Sebastianas. Iškart po starto Michaelis išsiveržė į priekį, o Sebastianas atsiliko nuo savo varžovų. Lenktynių metu Michaelis ir Fernandas aplenkė vienas kitą iš viso 9 kartus, Fernandas ir Sebastianas – 10 kartų, o Michaelis ir Sebastianas – 11 kartų. Kuria tvarka, pradedant nuo laimėtojo, lenktynininkai pasiekė finišą?

A) Michaelis, Fernandas, Sebastianas **B)** Fernandas, Sebastianas, Michaelis
C) Sebastianas, Michaelis, Fernandas **D)** Sebastianas, Fernandas, Michaelis
E) Fernandas, Michaelis, Sebastianas

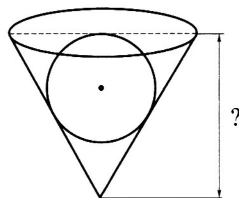
J13. Duota, kad $9^n+9^n+9^n=3^{2011}$. Raskite n.

A) 1005 **B)** 1006 **C)** 2010 **D)** 2011 **E)** Nė vienas iš pateiktųjų

J14. Dviejų kubų briaunų ilgiai yra sveikieji skaičiai ir skiriasi 1. Tų kubų tūrių skirtumas lygus 217. Kam lygus didesniojo kubo tūris?

A) 243 **B)** 729 **C)** 125 **D)** 1331 **E)** 512

J15. Stiklinis rutuliukas, kurio spindulys yra 15, įriedėjo į kūgio formos ertmę. Rutuliuko viršutinis taškas yra viename aukštyje su ertmės kraštu (žr. pav.). Žiūrint iš šono, ertmės vaizdas yra lygiakraštis trikampis. Koks yra ertmės gylis?



A) 45 **B)** $25\sqrt{3}$ **C)** $30\sqrt{2}$ **D)** 60 **E)** $60(\sqrt{3}-1)$

J16. Kiekvienas lentelės 4×4 langelis spalvinamas juodai arba raudonai. Skaičius, užrašytas prie eilutės ar stulpelio, žymi, kiek toje eilutėje ar stulpelyje turi būti juodų langelių. Keliais būdais galima nuspalvinti lentelę?

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 9

J17. Kiek daugiausiai iš eilės einančių triženklių natūraliųjų skaičių gali turėti bent po vieną nelyginį skaitmenį?

A) 1 **B)** 10 **C)** 110 **D)** 111 **E)** 221

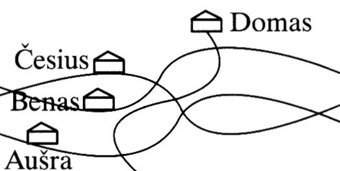
J18. Mikas į kiekvieną lentelės 3×3 langelį nori įrašyti po sveikąjį skaičių taip, kad kiekvienoje lentelės dalyje 2×2 skaičių suma būtų lygi 10. Penki skaičiai jau įrašyti. Kam bus lygi dar neįrašytų skaičių suma?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

1		0
	2	
4		3

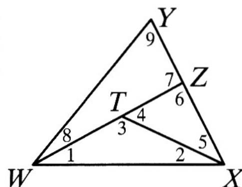
J19. Smarkiai kratoma važinėjant, Jurgita padarė savo gimtojo kaimo žemėlapio eskizą, kuriame pavaizdavo keturias gatves, jų septynis susikirtimus ir savo draugų namus. Tačiau iš tikrųjų Nendrių, Stygų ir Žvakių gatvės yra visiškai tiesios, ir tik Riestainių gatvė vingiuoja. Kas iš Jurgitos draugų gyvena Riestainių gatvėje?

A) Aušra **B)** Benas **C)** Česius **D)** Domas
E) Iš eskizo to nustatyti neįmanoma



J20. Trikampio WXY kraštinėje XY pažymėtas taškas Z, o tada atkarpoje WZ pažymėtas taškas T. Romas užrašė devynių kampų, brėžinyje pažymėtų numeriais nuo 1 iki 9, didumus. Kiek mažiausiai skirtingų skaičių galėjo parašyti Romas?

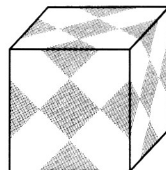
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6



KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

J21. Simas turi medinį kubą, kurio briaunų ilgiai lygūs 1 dm. Kubo sieneles Simas išklijavo vienodais juodais kvadratais, kaip pavaizduota paveikslėlyje (visos kubo sienelės atrodo vienodai). Kokį kubo paviršiaus plotą (cm^2) dengia kvadratai?

A) 37,5 **B)** 150 **C)** 225 **D)** 300 **E)** 375



J22. Natūralusis skaičius vadinamas *kietuoju*, jei jis užrašomas penkiais skirtingais skaitmenimis, o pirmas jo skaitmuo lygus likusių keturių skaitmenų sumai. Kiek yra *kietųjų* skaičių?

A) 72 **B)** 144 **C)** 168 **D)** 216 **E)** 288

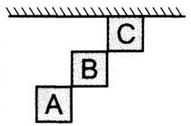
J23. Abu skaičiai x ir y didesni už 1. Kurios iš šių trupmenų reikšmė yra didžiausia?

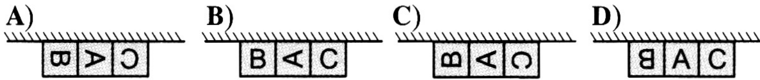
A) $\frac{x}{y+1}$ **B)** $\frac{x}{y-1}$ **C)** $\frac{2x}{2y+1}$ **D)** $\frac{2x}{2y-1}$ **E)** $\frac{3x}{3y+1}$

J24. Švieslentėje 4×4 Marius žaidžia tokį žaidimą. Kai jis spusteli kurį nors lentelės langelį, šis nušvinta raudonai arba mėlynai. Yra žinoma, kad švieslentėje yra lygiai du mėlynai nušvintantys langeliai, be to, jie turi bendrą kraštinę. Kiek mažiausiai langelių Mariui visada užteks protingai žaidžiant spustelėti, kad įžiebtų abu mėlynuosius švieslentės langelius?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

J25. Į parduotuvę buvo atvežtos trys didžiulės kubinės dėžės su prekėmis ir pastatytos ant grindų, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Dėžes reikia nustumti prie sienos. Bet jos tokios sunkios, kad jas įmanoma tik pasukti 90° kampu apie kurią nors pagrindo viršūnę. Kuri dėžių padėtis prie sienos įmanoma?





E) Visos keturios padėtys įmanomos

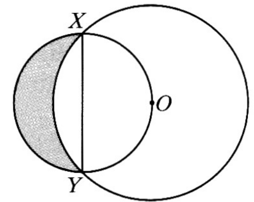
J26. Kiek yra sutvarkytųjų natūraliųjų skaičių porų (x, y), tenkinančių lygtį $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

J27. Kiekvienam natūraliajam $n \geqslant 2$ didžiausią pirminį skaičių, neviršijantį n, pažymėkime $\langle n \rangle$. Kiek natūraliųjų sprendinių k turi lygtis $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Daugiau nei 3

J28. Paveikslėlyje pavaizduoti du apskritimai. Atkarpa XY yra mažesniojo apskritimo skersmuo, o didesniojo apskritimo centras O priklauso mažesniajam apskritimui. Didesniojo apskritimo spindulys yra lygus r. Kam lygus užtušuotas plotas?



A) $\frac{\pi}{6} \cdot r^2$ **B)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{12} \cdot r^2$ **C)** $\frac{1}{2} \cdot r^2$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$

E) Kitas atsakymas

J29. Iš kubo briaunų pasirenkame tokias keturias briaunas, kad jokios dvi iš jų neturi bendrų viršūnių. Kiek yra tokių ketvertų?

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 18

J30. Kurioms natūraliosioms n reikšmėms ($n < 9$) įmanoma taip nudažyti kai kuriuos lentelės 5×5 langelius, kad bet kuriame lentelės kvadrate 3×3 būtų lygiai n nudažytų langelių?

A) 1 **B)** 1 ir 2 **C)** 1, 2 ir 3 **D)** 1, 2, 7 ir 8 **E)** Visoms reikšmėms nuo 1 iki 8

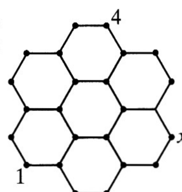
SENJORAS (XI ir XII klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

S1. Ties kiekvienu pavaizduotos gardelės mazgu reikia įrašyti po skaičių taip, kad bet kurios atkarpėlės galuose esančių skaičių suma būtų ta pati. Du skaičiai jau įrašyti. Kokį skaičių teks įrašyti vietoj x?

A) 1 **B**) 3 **C**) 4 **D**) 5 **E**) Trūksta informacijos



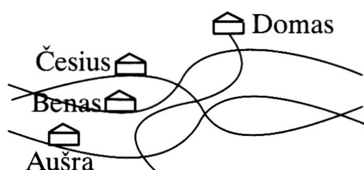
S2. Automobilių lenktynėse dalyvavo trys sportininkai: Michaelis (M), Fernandas (F) ir Sebastianas (S). Iškart po starto Michaelis išsiveržė į priekį, o Sebastianas atsiliko nuo savo varžovų. Lenktynių metu Michaelis ir Fernandas aplenkė vienas kitą iš viso 9 kartus, Fernandas ir Sebastianas – 10 kartų, o Michaelis ir Sebastianas – 11 kartų. Kuria tvarka, pradedant nuo laimėtojo, lenktynininkai pasiekė finišą?

A) MFS **B**) FSM **C**) SMF **D**) SFM **E**) FMS

S3. Duota, kad $2^x = 15$ ir $15^y = 32$. Kam lygu xy?

A) 5 **B**) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ **C**) $\log_2 47$ **D**) 7 **E**) $\sqrt{47}$

S4. Jurgita nupiešė savo gimtojo kaimo žemėlapio eskizą, kuriame pavaizdavo keturias gatves, jų septynis susikirtimus ir savo draugų namus. Tačiau iš tikrųjų Nendrių, Stygų ir Žvakių gatvės yra visiškai tiesios, ir tik Riestainių gatvė vingiuoja.



Kas iš Jurgitos draugų gyvena Riestainių gatvėje?

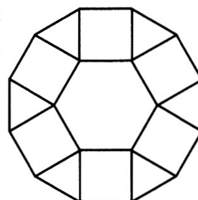
A) Aušra **B**) Benas **C**) Česius **D**) Domas **E**) Iš eskizo to nustatyti neįmanoma

S5. Visi keturženkliai skaičiai, kurių skaitmenų suma lygi 4, surašyti mažėjimo tvarka. Kelintas iš eilės šiame sąraše yra skaičius 2011?

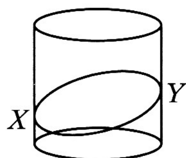
A) 6-tas **B**) 7-tas **C**) 8-tas **D**) 9-tas **E**) 10-tas

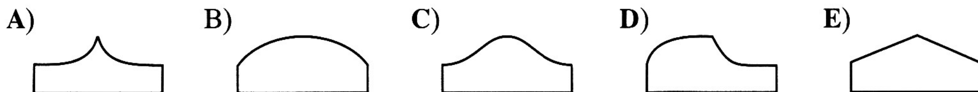
S6. Pavaizduotoji geometrinė figūra sudaryta iš taisyklingojo šešiakampio su vienetinio ilgio kraštinėmis, šešių lygiakraščių trikampių ir šešių kvadratų. Kam lygus figūros perimetras?

A) $6(1 + \sqrt{2})$ **B**) $6 + 3\sqrt{3}$ **C**) 12 **D**) $6 + 3\sqrt{2}$ **E**) 9

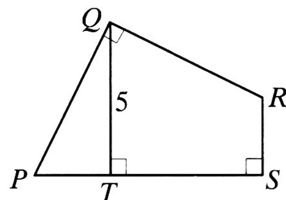


S7. Tūtelė (ritinys be pagrindų) susukta lenkiant stačiakampį popieriaus lapą ir suglaudžiant du priešingus lapo kraštus. Tūtelę kerta plokštuma, einanti per taškus X ir Y (žr. paveikslėlį), ir dalija ją į dvi dalis. Atvyniojus apatinę tūtelės dalį, vėl gautas plokščias lapo gabalas. Kuriame paveikslėlyje jis gali būti pavaizduotas?





S8. Kam lygus pavaizduoto keturkampio $PQRS$ plotas, jei $PQ = QR$, $\angle PQR = \angle PSR = 90^\circ$, $QT \perp PS$ ir $QT = 5$?



A) 20 **B)** 22,5 **C)** 25 **D)** 27,5 **E)** 30

S9. Andrius lentoje užrašė visus nelyginius skaičius nuo 1 iki 2011, o tada Balys nutrynė visus užrašytus skaičiaus 3 kartotinius. Kiek skaičių liko lentoje?

A) 335 **B)** 336 **C)** 671 **D)** 1005 **E)** 1006

S10. Kiek reikia iš karto mesti lošimo kauliukų, kad tikimybė, jog neatvirs nė viena šešakė, būtų lygi tikimybei, jog atvirs lygiai viena šešakė?

A) 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 17

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

S11. Iš trijų stačiakampių be persidengimų ir tarpų sudaromas vienas didesnis. Dviejų stačiakampių matmenys yra 7×11 ir 4×8. Kokie yra trečiojo stačiakampio matmenys, jeigu jo plotas yra didžiausias įmanomas?

A) 1×11 **B)** 3×4 **C)** 3×8 **D)** 7×8 **E)** 7×11

S12. Mykolas nori įrašyti į kiekvieną lentelės 3×3 langelį po sveikąjį skaičių taip, kad kiekvienoje lentelės dalyje 2×2 skaičių suma būtų lygi 10. Keturi skaičiai jau įrašyti. Kam gali būti lygi dar neįrašytų skaičių suma?

	2	
1		3
	4	

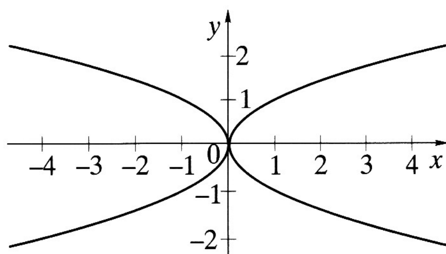
A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 13 **E)** Atsakymai **A–D** netinka

S13. Slidžių žygyje dalyvavo 48 berniukai. Šeši iš jų turėjo žygyje vieną savo brolį, devyni turėjo du brolius, o keturi — tris brolius. Likusieji berniukai žygyje brolių neturėjo. Iš kelių skirtingų šeimų buvo žygio dalyviai?

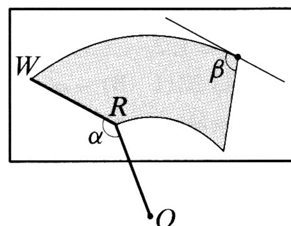
A) 19 **B)** 25 **C)** 31 **D)** 36 **E)** 48

S14. Duotos funkcijos $y = x^2$, $y = -x^2$,
$y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$,
$y = -\sqrt{-x}$, $y = \sqrt{|x|}$, $y = -\sqrt{|x|}$.
Kelių iš jų grafikus galima įžvelgti brėžinyje?

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

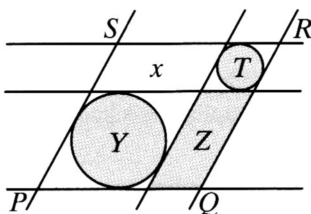


S15. Automobilio lango valytuvo mentė RW ir svirtis OR yra vienodo ilgio bei sudaro pastovų kampą α. Sukdamasis aplink atramos tašką O, valytuvas nuvalė užtušuotą lango sritį. Raskite kampą β, kurį sudaro nuvalytosios srities dešinysis kraštas ir viršutinio jos krašto liestinė.



A) $\frac{3\pi-\alpha}{2}$ **B)** $\pi-\frac{\alpha}{2}$ **C)** $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ **D)** $\frac{\pi}{2}+\alpha$ **E)** $\pi+\frac{\alpha}{2}$

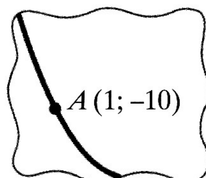
S16. Paveikslėlyje pavaizduotos trys horizontalios bei trys lygiagrečios pasviros tiesės. Kiekvienas iš dviejų apskritimų liečia keturias tieses. Raidėmis Y, Z ir T pažymėti užtušuotų figūrų plotai, o raide W – lygiagretainio $PQRS$ plotas.



Mažiausiai kelis iš skaičių Y, Z, T ir W būtina žinoti, norint rasti lygiagretainio x plotą?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Žinoti vien Y, Z, T ir W neužtenka

S17. Plokštumoje įprastiniu būdu įvesta stačiakampė koordinačių sistema. Paveikslėlyje pavaizduota plokštumos dalis su joje esančiu parabolės $y = ax^2 + bx + c$ lanku ir jam priklausančiu tašku $(1; -10)$. Kuri iš šių nelygybių gali būti klaidinga?



A) $a > 0$ **B)** $b < 0$ **C)** $a+b+c < 0$ **D)** $b^2 > 4ac$ **E)** $c < 0$

S18. Šešiakampio $PQRSTU$ kraštinės liečia vieną apskritimą. Kraštinių PQ, QR, RS, ST ir TU ilgiai atitinkamai yra 4, 5, 6, 7 ir 8. Kam lygus kraštinės UP ilgis?

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** Trūksta informacijos

S19. Natūralusis skaičius x yra mažesnis už 100, o $x^2 - 81$ dalijasi iš 100. Kam lygi visų tokių skaičių x suma?

A) 200 **B)** 100 **C)** 90 **D)** 81 **E)** 50

S20. Broliai Algis ir Bronius pasakojo apie šachmatų klubą, kuriam priklauso. Algis pasakė: „Mūsų klubo nariai yra vien berniukai, neskaitant penkių mergaičių.“ Bronius pasakė: „Tarp bet kurių šešių klubo narių visada yra bent keturios mergaitės.“ Kiek vaikų priklauso šachmatų klubui?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 18

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

S21. Loterijos maiše guli rutuliai, pažymėti skirtingais natūraliaisiais skaičiais (ant kiekvieno rutulio yra po vieną skaičių). 30 rutulių pažymėti skaičiaus 6 kartotiniais, 20 rutulių – 7 kartotiniais ir 10 rutulių – 42 kartotiniais. Kiek mažiausiai rutulių gali būti maiše?

A) 30 **B)** 40 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 60

S22. Kiek yra aritmetinių progresijų, kurių visi nariai yra natūralieji skaičiai ir kurioms priklauso visi abiejų progresijų 5, 20, 35, ... bei 35, 61, 87, ... nariai?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 26 **E)** Be galo daug

S23. Funkcijų seka $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... apibrėžta lygybėmis: $f_1(x) = x$; $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1-f_n(x)}$, kai $n = 1, 2, \ldots$. Kam lygu $f_{2011}(2011)$?

A) 2011 **B)** $-\frac{1}{2010}$ **C)** $\frac{2010}{2011}$ **D)** 1 **E)** -2011

S24. Dėžėje yra tik raudoni ir žali rutuliai. Iš dėžės atsitiktinai ištraukti du rutuliai bus tos pačios spalvos su tikimybe $\frac{1}{2}$. Kuris iš šių skaičių gali reikšti bendrą rutulių kiekį dėžėje?

A) 81 **B)** 101 **C)** 1000 **D)** 2011 **E)** 10001

S25. Oro linijų bendrovė neima bagažo mokesčio už bagažą, kurio svoris neviršija nustatytos normos, o už kiekvieną viršnorminį bagažo kilogramą ima fiksuotą mokestį. Ponas ir ponia Skraidūnai pasidalijo 60 kg bagažą ir sumokėjo 3 eurus – mažiausiai, kiek tik apskritai jie galėjo sumokėti, o ponas Klajūnas, kurio bagažas svėrė tiek pat, sumokėjo 10,5 euro. Kokį didžiausią bagažo svorį keleivis gali vežtis nemokamai?

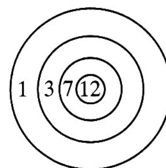
A) 10 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 39

S26. Reiškinyje $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$ kiekviena raidė žymi nenulinį skaitmenį, o skirtingos raidės žymi skirtingus skaitmenis. Kokią mažiausią natūraliąją reikšmę gali įgyti reiškinys?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

S27. Robinas Hudas paleido tris strėles į pavaizduotą taikinį ir visus tris kartus pataikė, pelnydamas už kiekvieną šūvį atitinkamą skaičių taškų. Kiek skirtingų reikšmių gali turėti Robino Hudo surinktų taškų suma?

A) 13 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21



S28. Natūralieji skaičiai a, b ir c tenkina lygybes $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Kiek mažiausiai teigiamų daliklių (įskaitant 1 ir save patį) gali turėti skaičius $a \cdot b \cdot c$?

A) 30 **B)** 49 **C)** 60 **D)** 77 **E)** 1596

S29. Į lentelės 4×5 langelius įrašyta 20 skirtingų natūraliųjų skaičių. Bet kurių dviejų gretimų (turinčių bendrą kraštinę) langelių skaičiai turi bendrą daliklį, didesnį už 1. Iš įrašytųjų skaičių imamas didžiausias. Kokia yra mažiausia galima jo reikšmė?

A) 21 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 40

S30. Kubas $3 \times 3 \times 3$ sudarytas iš 27 vienetinių kubelių. Kiek vienetinių kubelių kerta plokštuma, statmena didžiojo kubo įstrižainei (jungiančiai dvi kubo priešingas viršūnes) ir einanti per tos įstrižainės vidurį?

A) 17 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

SPRENDIMAI

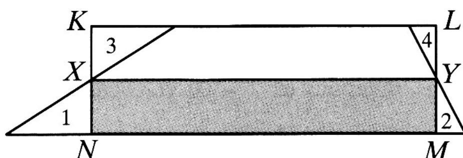
JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. Ⓑ

! Aštuonias baltas juostas vieną nuo kitos skiria septynios juodos. Iš viso turime $8 + 7 = 15$ juostų, kurių bendras plotis lygus $15 \cdot 50 = 750\,(\text{cm})$, t. y. 7,5 m.
Teisingas atsakymas **B**.

J2. Ⓒ

! Prie trapecijos prijunkime du trikampius taip, kad virš užtušuoto stačiakampio $XYMN$ susidarytų dar vienas stačiakampis $KLYX$ (žr. brėžinį, kuriame šie trikampiai pažymėti skaičiais 3 ir 4).



Pastebėkime, kad trikampiai 1 ir 3 lygūs (jų įžambinės lygios, nes taškas X dalija šoninę trapecijos kraštinę pusiau, o kampai prie įžambinių poromis lygūs kaip kryžminiai ir kaip priešiniai). Trikampiai 2 ir 4 taip pat lygūs. Todėl trapecijos plotas lygus stačiakampio $KLMN$ plotui.
Kadangi trikampiai 1 ir 3 lygūs, tai $KX = XN$, t. y. stačiakampių $KLYX$ ir $XYMN$ pločiai (kaip ir ilgiai) sutampa, todėl ir jų plotai sutampa bei yra lygūs $13\,\text{cm}^2$. Tada stačiakampio $KLMN$ (o ir trapecijos) plotas lygus $13 + 13 = 26\,(\text{cm}^2)$.
Teisingas atsakymas **C**.

J3. Ⓓ

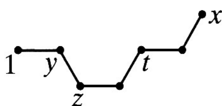
! P, Q ir R reikšmes galima tiesiog suskaičiuoti, tačiau palyginti jas galima ir kitaip:

$$1 \cdot 2 < 2^2 < 2 \cdot 3,$$
$$2 \cdot 3 < 3^2 < 3 \cdot 4,$$
$$3 \cdot 4 < 4^2 < 4 \cdot 5.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname, kad $R < Q < P$.
Teisingas atsakymas **D**.

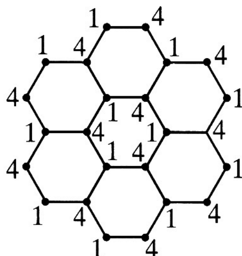
J4. Ⓐ

! Nagrinėkime apatinę gardelės dalį:



Imkime dvi atkarpas, kurių galai yra pažymėti 1 ir y bei y ir z. Pagal sąlygą $1 + y = y + z$, todėl $z = 1$. Analogiškai įrodoma, kad prie bet kurių dviejų atkarpų, kurių du galai sutampa, kitų dviejų

galų įrašyti vienodi skaičiai: $t = z$ ir $x = t$. Vadinasi, $x = 1$. (Pastebėkime, kad gardelę įmanoma užpildyti iki galo; žr. paveikslėlį.)



Teisingas atsakymas **A**.

J5. Ⓓ

! Jei dalijant 31 iš n liekana yra 7, tai egzistuoja toks natūralusis skaičius k, kad teisinga lygybė $31 = kn + 7$, todėl n yra skaičiaus $31 - 7 = 24$ daliklis. Kadangi liekana visada yra mažesnė už daliklį, tai $n > 7$. Skaičius 24 turi tris daliklius, didesnius už 7 — tai yra skaičiai 8, 12 ir 24. Nesunku patikrinti, kad visos trys reikšmės tinka.
Teisingas atsakymas **D**.

J6. Ⓒ

! Mozaika yra 5 plytelių arba $\frac{360}{24} = 15$ centimetrų pločio, todėl vienos kvadratinės plytelės kraštinės ilgis yra $\frac{15}{5} = 3\,(\mathrm{cm})$, o plytelės plotas — $3^2 = 9\,(\mathrm{cm}^2)$.
Teisingas atsakymas **C**.

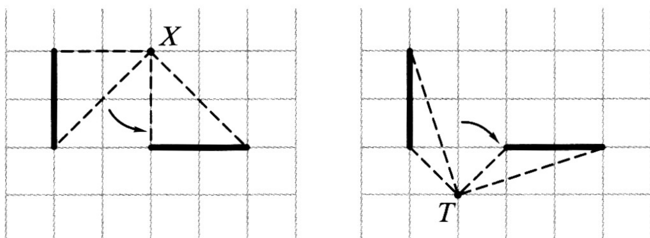
J7. Ⓓ

! Jei skaičiaus skaitmenų suma lygi 4, tai jo pirmasis skaitmuo neviršija 4: jis yra 4, 3, 2 arba 1. Skaičiai, prasidedantys vienetu, mūsų nedomina: jie mažesni už 2011 ir yra užrašyti po šio skaičiaus. Jei skaičius prasideda ketvertu ir jo skaitmenų suma lygi 4, tai likusių jo skaitmenų suma lygi 0, t. y. po ketverto visi skaitmenys yra 0. Turime tik vieną tokį skaičių: 4000.
Jei skaičus prasideda trejetu, likusių trijų skaitmenų suma lygi 1. Taip bus tik tada, kai du skaitmenys yra lygūs 0 ir vienas lygus 1. Gauname tris skaičius: 3100, 3010 ir 3001.
Jei skaičius prasideda dvejetu, likusių trijų skaitmenų suma lygi 2. 2 kaip trijų skaitmenų sumą galima užrašyti dviem būdais (kai skaitmenų tvarka nesvarbi): $2 = 2+0+0 = 1+1+0$. Pirmu atveju gauname tris skaičius (nes skaitmuo 2 gali būti bet kurioje iš trijų pozicijų, o likę du skaitmenys privalo būti nuliai): 2200, 2020, 2002. Iš šių skaičių du (2200 ir 2020) didesni už 2011. Panašiai ir antru atveju gauname tris skaičius: 2011, 2101, 2110. Iš jų ir vėl du yra didesni už 2011.
Taip gavome visus skaičius, kurie sekoje eina prieš 2011: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020. Jų yra aštuoni, todėl skaičius 2011 sekoje yra devintas.
Teisingas atsakymas **D**.

J8. Ⓒ

? Pamėginę mintyse sukti atkarpas apie pažymėtus taškus, lengvai įsitikiname, kad posūkio centrais gali būti tik taškai X ir T. Apie tašką X kairiąją atkarpą reikia pasukti 90° kampu prieš laikrodžio

rodyklę, o apie tašką T — 90° kampu pagal laikrodžio rodyklę (žr. paveikslėlį).



Renkamės atsakymą **C**.

Griežtai įrodykime, kad taškai Y ir Z netinka. Tam užtenka pastebėti, kad sukant tašką apie kitą tašką nekinta atstumas tarp jų. Tačiau jei langelio kraštinės ilgį prilyginsime vienetui, tai atstumai nuo taško Y iki kairiosios paryškintos atkarpos galų bus $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{2}$, o iki dešiniosios — $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{10}$. Taigi vienos atkarpos galai negali pereiti į kitos sukant atkarpą apie tašką Y. Panašiai atmetame ir tašką Z (jo atstumai iki atkarpų galų yra 1 ir 3 bei $\sqrt{5}$ ir $\sqrt{17}$).
Teisingas atsakymas **C**.

J9. Ⓒ

Kadangi kiekvienas kvadratas turi bendrą kraštinę su taisyklinguoju šešiakampiu, tai visos kvadratų kraštinės yra vienetinio ilgio. Be to, kadangi kiekvienas lygiakraštis trikampis turi dvi bendras kraštines su kvadratais, tai ir visos trikampių kraštinės yra vienetinio ilgio. Lieka pastebėti, kad pavaizduotoji figūra yra dvylikakampis, kurio kiekviena kraštinė yra vieno iš lygiakraščių trikampių kraštinė, t. y. visos šio dvylikakampio kraštinės yra ilgio 1. Taigi figūros perimetras lygus $12 \cdot 1 = 12$.
Teisingas atsakymas **C**.

J10. Ⓔ

Nustatykime, kiek akučių gali būti vidurinio kauliuko viršutinėje ir apatinėje sienelėse. Apatinėje sienelėje negali būti 5 ar 6 akučių — kitaip šios sienelės ir prie jos priglaustos kito kauliuko sienelės akučių suma viršytų 5. Taip pat ir viršutinėje sienelėje negali būti 5 ar 6 akučių. Tai reiškia (turint omeny, kad viršutinės ir apatinės sienelių akučių suma lygi 7), jog apatinėje sienelėje negali būti $7 - 5 = 2$ ar $7 - 6 = 1$ akutė. Taigi apatinėje sienelėje yra 3 arba 4 akutės. Jei jų būtų 4, tai apatinio kauliuko viršutinėje sienelėje būtų $5 - 4 = 1$ akutė, bet 1 akutė jau yra šio kauliuko priekinėje sienelėje. Taigi vidurinio kauliuko apatinėje sienelėje yra 3 akutės, todėl jo viršutinėje sienelėje yra $7 - 3 = 4$ akutės; viršutinio kauliuko apatinėje sienelėje yra $5 - 4 = 1$ akutė, o jo viršutinėje sienelėje yra $7 - 1 = 6$ akutės.
Teisingas atsakymas **E**.

J11. Ⓑ

Per pirmąsias 28 mėnesio dienas kiekviena savaitės diena pasikartoja lygiai 4 kartus. Likusiomis mėnesio dienomis kai kurios savaitės dienos pasikartoja po penktą kartą. Antrąjį mėnesį po 5 kartus pasikartojo net trys savaitės dienos, todėl tą mėnesį buvo 31 diena, o jo paskutinės trys dienos ir buvo po 5 kartus tą mėnesį pasikartojusiosios: pirmadienis, antradienis ir trečiadienis. Taigi antrasis mėnuo baigėsi trečiadieniu ir, kaip nesunku suskaičiuoti, prasidėjo pirmadieniu. Tada pirmojo mėnesio paskutinė diena buvo sekmadienis. Jei pirmasis mėnuo turėtų bent 29 dienas, tai jo 1-oji, 8-oji, 15-oji, 22-oji ir 29-oji nuo galo dienos būtų sekmadieniai. Turėtume 5 sekmadienius, o tai prieštarauja uždavinio sąlygai. Vadinasi, pirmasis mėnuo turėjo 28 dienas, t. y. šis mėnuo — vasaris. Ketvirtadieniu prasidedantis trečiasis mėnuo — balandis, kuris turi 30 dienų. Tokį balandį

ketvirtadienių ir penktadienių yra po 5, o likusių savaitės dienų — po 4. Taigi iš atsakymų **A**–**D** tinka tik **B**.
Lieka pastebėti, kad galima atmesti ir atsakymą **E**, nes uždavinio situacija įmanoma. Iš tiesų, uždavinio sąlyga tenkinama, kai mėnesiai yra vasaris, kovas ir balandis, metai nėra keliamieji ir kovas prasideda pirmadieniu. (Abejojantiems, ar kovo 1-oji gali būti pirmadienis nekeliamaisiais metais, primename, kad taip buvo, pvz., 2010-aisiais.)
Teisingas atsakymas **B**.

J12. Ⓑ

Kai sportininkai aplenkia vienas kitą du kartus (iš pradžių pirmas antrą, o po to atvirkščiai) pradžioje pirmavęs sportininkas vėl išsiveržia į priekį. Todėl lyginį skaičių kartų vienas kitą lenkę sportininkai lieka toje pačioje padėtyje vienas kito atžvilgiu, o nelyginį skaičių kartų vienas kitą lenkę sportininkai apsikeičia vietomis.
Michaelis pradžioje pirmavo prieš Fernandą ir Sebastianą, bet apsikeitė su jais vietomis po nelyginį skaičių kartų, todėl finišą pasiekė vėliau už abu varžovus. O Sebastianas ir Fernandas apsikeitė vietomis lyginį skaičių kartų, todėl nuo Fernando pradžioje atsilikęs Sebastianas ir finišą už jį pasiekė vėliau. Taigi Fernandas laimėjo lenktynes, o Michaelis pasirodė prasčiausiai.
Teisingas atsakymas **B**.

J13. Ⓐ

Dešinėje lygybės pusėje turėdami 3 laipsnį, taip užrašykime ir kairiąją pusę:

$$9^n + 9^n + 9^n = 3^{2n} + 3^{2n} + 3^{2n} = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1}.$$

Gauname, kad $2n + 1 = 2011$, t. y. $n = 1005$.
Teisingas atsakymas **A**.

J14. Ⓑ

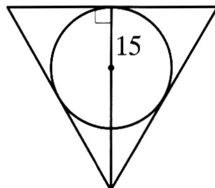
Didesniojo kubo briaunos ilgį pažymėkime a. Gauname, kad mažesniojo kubo briaunos ilgis yra $a - 1$, o kubų tūrių skirtumas lygus

$$217 = a^3 - (a-1)^3 = a^3 - a^3 + 3a^2 - 3a + 1 = 3a^2 - 3a + 1,$$

$3a^2 - 3a - 216 = 0$, arba $a^2 - a - 72 = 0$.
Išsprendę kvadratinę lygtį gauname, kad $a = 9$ arba $a = -8$. Briaunos ilgis yra teigiamas skaičius, tad $a = 9$, o ieškomas tūris lygus $a^3 = 729$.
Teisingas atsakymas **B**.

J15. Ⓐ

Nagrinėkime plokščią vaizdą, gaunamą į ertmę žiūrint iš šono: į lygiakraštį trikampį įbrėžtas spindulio 15 apskritimas (žr. paveikslėlį). Ertmės gylis lygus trikampio aukštinės ilgiui, tačiau lygiakraščio trikampio aukštinės sutampa su atitinkamomis jo pusiaukraštinėmis ir pusiaukampinėmis. Todėl pavaizduota aukštinė eina per pusiaukampinių sankirtos tašką (t. y. įbrėžtinio apskritimo centrą), kuris kartu yra ir pusiaukraštinių susikirtimo taškas, kiekvieną iš jų (taigi ir pavaizduotąją) dalijantis santykiu 2 : 1. Vadinasi, aukštinės atkarpa nuo trikampio viršūnės iki apskritimo centro yra dvigubai ilgesnė už jos atkarpą nuo apskritimo centro iki trikampio kraštinės, t. y. lygi $2 \cdot 15 = 30$. Taip gauname ir visą aukštinės ilgį (t. y. ertmės gylį) $30 + 15 = 45$.
Teisingas atsakymas **A**.



J16. Ⓓ

! Nagrinėkime du atvejus.
1) Kairysis viršutinis lentelės langelis yra raudonas. Tada viršutinėje eilutėje (kaip ir kairiajame stulpelyje) lieka dvi vietos dviem juodiems langeliams. Pažymėkime juos (žr. pav.): gautas nudažymas tinka, o daugiau langelių nebenudažysi.
2) Kairysis viršutinis lentelės langelis yra juodas. Dabar viršutinėje eilutėje ir kairiajame stulpelyje reikia juodai nudažyti dar po vieną langelį.

Kiekvieną iš tų dviejų langelių galima parinkti dviem būdais (eilutėje ir stulpelyje yra po du langelius, kuriuos dar galima nudažyti). Taip gauname $2 \cdot 2 = 4$ atvejus. Kiekvienu iš jų lieka dar vienas langelis, kurį galima (ir būtina) nudažyti. Taip gauname 4 gerus nudažymo būdus:

Iš viso turime $1 + 4 = 5$ gerus nudažymo būdus.
Teisingas atsakymas **D**.

J17. Ⓓ

? Nėra sunku rasti 111 tokių skaičių: 289, 290, 291, ..., 399. Skaičiaus 289 trečiasis skaitmuo nelyginis, dešimties skaičių $290, 291, \ldots, 299$ antrasis skaitmuo 9 nelyginis, o šimto skaičių $300, 301, \ldots, 399$ nelyginis yra pirmasis skaitmuo 3. Taigi mums lieka pasirinkti vieną iš atsakymų **D** ir **E**. Bet **E** akivaizdžiai netinka: nuo 100 iki 200, nuo 200 iki 400, nuo 400 iki 600, nuo 600 iki 800 ir nuo 800 iki 1000 yra mažiau nei 221 skaičius.
Renkamės atsakymą **D**.

! Įrodysime, kad nė 112 norimų skaičių nepavyks rasti. Pastebėkime, kad skaičiai 200, 288, 400, 488, 600, 688, 800, 888 mums netinka — jų visi skaitmenys lyginiai. Todėl tikti mums galėtų tik iš eilės einantys skaičiai nuo 100 iki 199, nuo 201 iki 287 ir t. t. Tačiau kiekvienoje iš šių sekų yra mažiau nei 112 skaičių, todėl ir ieškomoje sekoje tiek jų negali būti.
Teisingas atsakymas **D**.

J18. Ⓓ

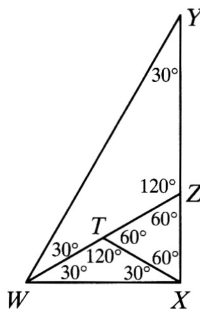
! Tarkime, į lentelę bus įrašyti skaičiai x, y, z, t (žr. pav.). Tada imdami kairiąją viršutinę ir dešiniąją apatinę lentelės dalis 2×2 gauname lygybes $1 + 2 + x + y = 10$ ir $2 + 3 + z + t = 10$. Todėl $x + y + z + t = (10-3)+(10-5) = 12$. (Pastebėkime, kad Mikas gali įrašyti tinkamus skaičius, pvz., $x = 0$, $y = 7$, $z = 8$, $t = -3$.)
Teisingas atsakymas **D**.

1	x	0
y	2	z
4	t	3

J19. Ⓒ

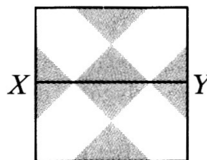
! Dvi tiesios gatvės negali kirstis du kartus, todėl jei gatvės kertasi du kartus, tai viena iš jų yra Riestainių. Po du kartus kertasi Česiaus ir Beno bei Česiaus ir Aušros gatvės. Jei Česiaus gatvė būtų tiesi, tai Beno ir Aušros gatvės turėtų abi vingiuoti, tačiau pagal sąlygą tik viena gatvė yra kreiva. Vadinasi, Riestainių gatvėje gyvena Česius.
Teisingas atsakymas **C**.

J20. Ⓑ



Romas galėjo užrašyti tik 3 skirtingus skaičius (žr. brėžinį): imkime tokį trikampį WXY, kad $\angle WXY = 90°$, $\angle 9 = \angle WYX = 30°$ ir $\angle XWY = 60°$. Tegu WZ yra ΔWXY pusiaukampinė ($\angle 1 = \angle 8 = \frac{60°}{2} = 30°$), o T galime pažymėti taip, kad $\angle 2 = \angle WXT = 30°$.
Tada $\angle 3 = \angle XTW = 180° - 30° - 30° = 120°$ ir $\angle 5 = \angle TXZ = 90° - 30° = 60°$, $\angle 4 = 180° - \angle 3 = 180° - 120° = 60°$, $\angle 6 = 180° - \angle 4 - \angle 5 = 60°$, $\angle 7 = 180° - \angle 6 = 120°$. Gavome tris skirtingus kampus $30°$, $60°$ ir $120°$.
Dabar įrodysime, kad mažiau skirtingų kampų Romas gauti negalėjo. Bent vienas iš ΔXZT kampų 4 ir 6 yra smailasis, todėl bent vienas iš kampų $\angle 3 = 180° - \angle 4$ ir $\angle 7 = 180° - \angle 6$ yra bukasis. Taigi turime bent du skirtingus kampus: smailąjį ir bukąjį, kurių suma lygi $180°$.
Jau nustatėme, kad vienas iš kampų 3 ir 7 yra bukasis, todėl bent vienas iš trikampių XTW ir YZW yra bukasis. Tokio trikampio bukąjį kampą pažymėkime α. Tada vienas iš pažymėtųjų kampų yra $180° - \alpha$. Tačiau bukasis trikampis turi du smailius kampus, kurių suma lygi $180° - \alpha$, t. y. tie du kampai yra mažesni nei $180° - \alpha$. Vadinasi, jau turime bent du skirtingus smailiuosius kampus: $180° - \alpha$ ir dar vieną, mažesnį. Todėl Romas gavo mažiausiai tris skirtingus kampus: bent du skirtingus smailiuosius ir bent vieną bukąjį.
Teisingas atsakymas **B**.

J21. Ⓒ



Nagrinėkime bet kurią iš kubo sienų. Per dvi priešingas centrinio juodo kvadrato viršūnes nubrėžkime atkarpą XY (žr. pav.). Juodo kvadrato įstrižainės ilgį pažymėkime a (cm). Atkarpą XY sudaro trys dalys: centrinio juodo kvadrato įstrižainė ir dvi šoninių kvadratų įstrižainių puselės, taigi bendras atkarpos XY ilgis lygus $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 2a$ (cm). Tačiau $XY = 1\,\text{dm} = 10\,\text{cm}$ (atkarpa lygi kubo sienelės kraštinei), todėl $2a = 10$, $a = 5$ (cm). Iš Pitagoro teoremos lengva gauti, kad juodo kvadrato kraštinės ilgis yra $\frac{5}{\sqrt{2}}$ cm, o jo plotas — $(\frac{5}{\sqrt{2}})^2 = \frac{25}{2}$ (cm^2).
Vienoje kubo sienelėje yra vienas juodas kvadratas ir keturios juodų kvadratų puselės, todėl juodi kvadratai sienelėje dengia plotą, lygų $\frac{25}{2} + \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{75}{2}$ (cm^2). Kubas turi 6 sieneles, taigi bendras užklijuotas kubo paviršiaus plotas lygus $6 \cdot \frac{75}{2} = 225$ (cm^2).
Teisingas atsakymas **C**.

J22. Ⓒ

Jei penkiaženklis skaičius tenkina sąlygą, tai yra galimi penki atvejai.
1) Skaičiuje nėra skaitmens 0. Tada keturių mažesniųjų skaitmenų suma lygi mažiausiai $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, bet ši suma turi būti lygi didžiausiajam skaitmeniui, t. y. turi neviršyti 9. Taigi šiuo atveju tinkamų skaičių nėra.
2) Skaičiuje yra skaitmuo 0, bet nėra skaitmens 1. Jei tarp mažiausių skaitmenų bent vienas viršija 4, tai jų suma yra ne mažesnė nei $0 + 2 + 3 + 5 = 10 > 9$, todėl visi mažesnieji skaitmenys yra mažesni už 5, t. y. jie lygūs 0, 2, 3, 4, o pirmasis skaičiaus skaitmuo lygus $0 + 2 + 3 + 4 = 9$. Likusius keturis skaitmenis po pirmojo skaitmens galima išdėstyti bet kuria tvarka. Antrąjį skaitmenį galima parinkti 4 būdais. Jį parinkus trečiajam skaitmeniui lieka 3 galimybės, tada antrajam — dvi, o paskutinį skaitmenį pasirinkę visus kitus tegalime parinkti vieninteliu būdu. Taip iš viso gauname $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ skirtingus skaičius.
3) Skaičiuje yra skaitmenys 0 ir 1, bet nėra skaitmens 2. Jei šiuo atveju skaičiuje nėra ir skaitmens 3, tai 4 mažesniųjų skaitmenų suma ne mažesnė nei $0 + 1 + 4 + 5 > 9$. Todėl skaitmuo 3 skaičiuje turi būti. Likęs iš 4 skaitmenų tada gali būti 4 arba 5 (didesnis jis būti negali, nes $0 + 1 + 3 + 6 > 9$). Jei tas skaitmuo yra 4, tai pirmasis skaičiaus skaitmuo lygus $0 + 1 + 3 + 4 = 8$. Kitus 4 skaitmenis

(0, 1, 3, 4) galime surašyti bet kuria tvarka — tai galima padaryti 24 būdais (kaip ir 2) atveju).
24 skaičius gauname ir kai skaičiaus skaitmenys yra 0, 1, 3, 5 bei $0+1+3+5=9$.
4) Skaičiuje yra skaitmenys 0, 1 ir 2, bet nėra skaitmens 3. Paskutinis iš 4 mažesniųjų skaitmenų tada gali būti 4, 5 ar 6 (ir negali būti didesnis, nes $0+1+2+7>9$). Kiekvienu iš šių trijų atvejų ir vėl vienareikšmiškai gauname pirmąjį skaitmenį (7, 8 ar 9); be to, 4 mažesniuosius skaitmenis galime rašyti bet kuria tvarka — tad ir vėl gauname po 24 skaičius.
5) Skaičiuje yra skaitmenys 0, 1, 2 ir 3. Pirmasis skaitmuo tada lygus $0+1+2+3=6$, ir su šiais skaitmenimis vėl turime 24 skaičius.
Iš viso gavome $24 \cdot (1+2+3+1) = 168$ skaičius.
Teisingas atsakymas **C**.

J23. Ⓑ

? Trupmenas užtenka palyginti, paėmus konkrečias x ir y reikšmes, pvz., imkime $x=y=2$ ir palyginkime skaičius
A) $\frac{2}{3}$ **B**) 2 **C**) $\frac{4}{5}$ **D**) $\frac{4}{3}$ **E**) $\frac{6}{7}$
Didžiausia reikšmė yra **B**) 2.
Renkamės atsakymą **B**.

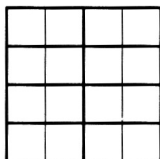
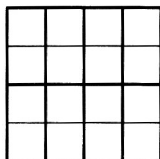
! Trupmenas paprasčiausia palyginti apvertus jas. Kadangi visos trupmenos yra teigiami skaičiai, tai nelygybės, kurias tenkina trupmenos, virs priešingomis. Taigi mums reikia nustatyti *mažiausią* iš šių skaičių:
A) $\frac{y}{x}+\frac{1}{x}$ **B**) $\frac{y}{x}-\frac{1}{x}$ **C**) $\frac{y}{x}+\frac{1}{2x}$ **D**) $\frac{y}{x}-\frac{1}{2x}$ **E**) $\frac{y}{x}+\frac{1}{3x}$
Iš skaičių $\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{2x}, -\frac{1}{2x}, \frac{1}{3x}$ mažiausias yra $-\frac{1}{x}$, atitinkantis atsakymą **B**.
Teisingas atsakymas **B**.

J24. Ⓑ

! Įsitikinkime, kad 10 spustelėjimų Mariui visada užteks. Tam jis gali vadovautis tokia strategija.
1) Pirmais 6 ėjimais jis spusteli langelius, pažymėtus skaičiumi 1 (žr. paveikslėlį). Jei bent vienas iš jų užsidega mėlynai, Mariui belieka spustelėti tris ar keturis langelius, turinčius bendrą kraštinę su mėlynai įsižiebusiuoju. Tokiu atveju Mariui užtenka iš viso $6+4=10$ ėjimų.

2		1	
	1		1
1		1	
	1		2

2) Jei nė vienas iš pirmų šešių langelių neįsižiebia mėlynai, Marius kitais dviem ėjimais spusteli langelius, pažymėtus skaičiumi 2. Bent vienas iš šių langelių pamėlynuos — kitaip lentelėje liktų 8 raudoni langeliai ir 8 dar neįsižiebę, iš kurių jokie du neturi bendros kraštinės. Mariui belieka patikrinti du langelius, turinčius bendrą kraštinę su mėlynai įsižiebusiuoju. Iš viso tokiu atveju Mariui ir vėl užtenka $6+2+2=10$ ėjimų.

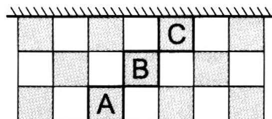



Dabar įrodysime, kad 9 spustelėjimų Mariui gali neužtekti, kad ir kaip jis bežaistų.
Padalinkime lentelę į 8 dvilanges dalis dviem būdais (žr. paveikslėlius). Po bet kokių pirmųjų 7 Mariaus ėjimų liks bent po vieną dvilangę lentelės dalį kiekviename paveikslėlyje, kurių kiekvienos nė vienas langelis nebus įžiebtas. Du mėlyni langeliai gali sutapti su viena iš tų likusių dalių. Tarkime, kad taip yra. Galimi du atvejai.
1) Dvi dar neliestos dvilangės dalys neturi bendro langelio. Šiuo atveju Marius, negalėdamas nuspėti, kurioje iš jų yra mėlyni langeliai, gali spustelėti dar vieną raudoną langelį aštuntuoju ėjimu — tada likusiu devintuoju jis geriausiu atveju spės atverti tik vieną mėlyną langelį.

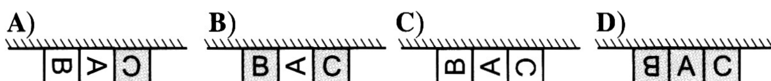
2) Neliestos dvilanglės lentelės dalys turi bendrą langelį. Jei šiuo atveju Marius spustels aštuntuoju ėjimu ne tą bendrą langelį, tačiau kurį nors kitą, tai neišvengiamai liks nepaliesta bent viena iš dvilangių dalių, kuriai esant sudarytai iš mėlynų langelių Mariaus įžiebtas langelis bus raudonas, ir Marius vėl nespės įžiebti abiejų mėlynų langelių devintuoju ėjimu. O jei Marius aštuntuoju ėjimu įžiebs bendrą dar neliestų dvilangių dalių langelį, tai devintuoju ėjimu jam teks rinktis iš neliestų langelių, turinčių bendrą kraštinę su ką tik įžiebtuoju. Tokių yra bent du — tai du dar neliesti nagrinėjamų dvilangių dalių langeliai. Taigi rinkdamasis iš bent dviejų langelių Marius devintuoju ėjimu ir vėl gali prašauti pro šalį. Šie samprotavimai įrodo, kad 9 ėjimų Mariui ne visada užteks. Teisingas atsakymas **B**.

J25. Ⓑ

? Paveikslėlyje grindis padalykime į vienodus kvadratinius langelius, kuriuos nudažykime juodai ir baltai šachmatų lentos principu. Dėžės pradžioje stovi ant juodų langelių. Norint išspręsti uždavinį svarbu pastebėti, kad sukant bet kurią dėžę 90° kampu ji vėl pilnai uždengia kurį nors langelį, bet kitos spalvos, nei buvo prieš tai.

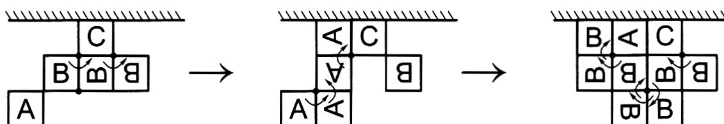


Be to, 90° kampu pasisuka dėžę žyminti raidė: jei piešinyje iki posūkio raidė buvo vertikalioje padėtyje, tai po jo atsiduria horizontalioje, ir atvirkščiai. Vadinasi, sukant dėžes jų raidžių horizontali ar vertikali padėtis bei langelio, ant kurio stovi dėžė, spalva kaitaliojasi vienu metu: kai dėžė stovi juodame langelyje, tai ir jos raidė yra vertikali (nes taip buvo pradinėje padėtyje); kai dėžė stovi baltame langelyje, jos raidė turi būti horizontali. Taigi, kai dėžės yra sustatytos, kaip parodyta atsakymuose **A–D**, langeliai, kuriuose stovi dėžės, turi būti nudažyti taip:



Šachmatų lentos tvarka langeliai nudažyti tik padėtyje **B**, o kitos padėtys netinka. Renkamės atsakymą **B**.

! Mums liko įrodyti, kad padėtis **B** yra įmanoma. Kad ją gautume, reikia stumdyti dėžes, kaip parodyta paveikslėlyje (pradžioje kelis kartus sukame dėžę **B**, tada **A**, po to vėl **B**).



Teisingas atsakymas **B**.

J26. Ⓓ

! Nagrinėkime du atvejus.
1) $x \leqslant y$. Tada $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$ ir $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$. Išsprendę nelygybę, gauname $x \leqslant 6$. Statydamiesi į lygtį x reikšmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, patikriname, su kuriomis iš jų skaičius $y = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}}$ yra natūralusis. Tinka $x = 4$ (tada $y = 12$) ir $x = 6$ (tada $y = 6$). Gauname poras $(4, 12)$ ir $(6, 6)$.
2) $y < x$. Spręsdami analogiškai atvejui 1) randame vienintelę porą $(12, 4)$.
Iš viso radome tris lygties sprendinius.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Šį uždavinį galima spręsti ir kitu būdu (kuris yra matematiškesnis bei efektyvesnis už pirmąjį, kai lygtyje vietoj skaičiaus 3 yra koks nors didesnis natūralusis skaičius n, ir pirmajame sprendime atliekama perranka tampa per ilga).
Padauginę lygtį iš $3xy$ (kad panaikintume vardiklius) ir sukėlę visus narius į vieną pusę, gauname lygtį $xy - 3x - 3y = 0$.

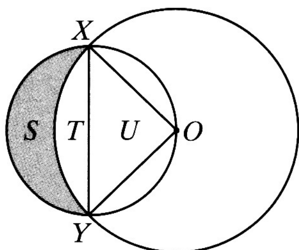
Dabar prie lygties kairės ir dešinės pusės pridėkime po tokį skaičių, kad kairė pusė išsiskaidytų į du dauginamuosius. Nesunku nuspėti, kad toks skaičius yra 9, nes $xy - 3x - 3y + 9 = (x-3)(y-3)$. Mūsų lygtis tampa $(x-3)(y-3) = 9$.
Skaičius 9 išreikštas kaip 2 sveikųjų skaičių sandauga. Kadangi $x - 3$ yra skaičiaus 9 sveikasis daliklis, tai jis gali būti lygus -9, -3, -1, 1, 3 arba 9. Tada $x = -6$, 0, 2, 4, 6 arba 12, o $y = 2$, 0, -6, 12, 6 arba 4. Mums tinka tik 3 galimybės: $(x, y) = (4, 12)$, $(6, 6)$ ir $(12, 4)$.

J27. Ⓑ

! Kadangi visiems natūraliesiems k galioja nelygybės $2 \leqslant k+1 < k+2 < 2k+3$, tai galioja ir nelygybės $2 \leqslant \langle k+1\rangle \leqslant \langle k+2\rangle \leqslant \langle 2k+3\rangle$. Pastebėkime, kad pirminiai skaičiai $\langle k+1\rangle$, $\langle k+2\rangle$ ir $\langle 2k+3\rangle$, tenkinantys duotąją lygybę, negali būti visi nelyginiai, nes dviejų nelyginių skaičių suma negali būti nelyginis skaičius. Todėl bent vienas iš šių pirminių skaičių yra lyginis, t. y. lygus 2. Iš mūsų nustatytų nelygybių išplaukia, kad $\langle k+1\rangle = 2$. Jei $k+1 \geqslant 3$, tai ir $\langle k+1\rangle \geqslant 3$, tad $k+1 = 2$, arba $k = 1$. Reikšmė $k = 1$ tenkina lygtį: $\langle 2\rangle + \langle 3\rangle = 2 + 3 = 5 = \langle 5\rangle$. Gavome vieną sprendinį. Teisingas atsakymas **B**.

J28. Ⓒ

! Kadangi XY — mažesniojo apskritimo skersmuo, tai kampas XOY — statusis. Pritaikę Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui OXY, kurio abu statiniai lygūs r, randame mažesniojo apskritimo skersmenį $XY = \sqrt{2}r$ ir spindulį $\frac{XY}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$. Dviejų skritulių plotai lygūs πr^2 ir $\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{2}$.



Didesniojo apskritimo nuopjovos, ribojamos jo stygos XY, plotą pažymėkime T, trikampio OXY plotą pažymėkime U, o užtušuotą plotą — S. Nuopjova ir trikampis OXY kartu sudaro didesniojo apskritimo išpjovą. Kadangi kampas XOY lygus $90°$, t. y. ketvirtadaliui pilnojo kampo $360°$, tai išpjovos plotas $T + U$ lygus ketvirtadaliui didesniojo skritulio ploto, $\frac{1}{4} \cdot \pi r^2$. Kita vertus, nuopjova ir užtušuota sritis sudaro pusę mažesniojo skritulio, todėl jų bendras plotas $T + S$ lygus pusei to skritulio ploto, $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{4}$. Taigi $T + S = T + U$ ir $S = U$. Stačiojo trikampio OXY plotas U lygus pusei jo statinių sandaugos:

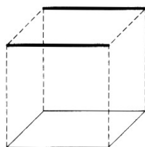
$$U = \frac{1}{2} OX \cdot OY = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r = \frac{r^2}{2}.$$

Taigi ieškomas plotas $S = U = \frac{r^2}{2}$.
Teisingas atsakymas **C**.

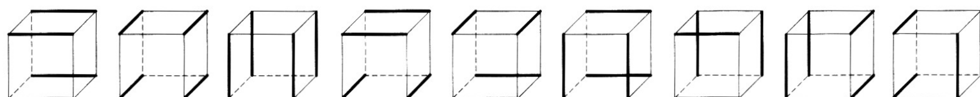
J29. Ⓒ

! Nagrinėkime du atvejus.
1) Tegu tarp pasirinktų keturių briaunų nėra tokių dviejų, kurios priklausytų vienai kubo sienai. Kiekviena briauna priklauso 2 kubo sienoms, o kubas turi 6 sienas, taigi šiuo atveju pasirinktos gali būti daugiausiai $\frac{6}{2} = 3$ briaunos. Vadinasi, taip pasirinkti 4 briaunų negalime.

2) Lieka atvejis, kai kubas turi sieną, kuriai priklauso 2 briaunos iš 4 pasirinktųjų. Tos dvi briaunos negali turėti bendro taško, todėl jos turi būti priešingos vienos sienos kraštinės.



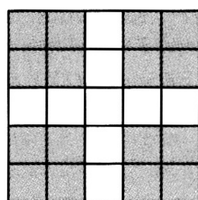
Paveikslėlyje šios dvi briaunos paryškintos, o kubo briaunos, kurių jau nebegalime pasirinkti, pažymėtos punktyru. Matome, kad likusias dvi briaunas vėl turime pasirinkti vienoje kubo sienoje. Taigi turime pasirinkti vieną iš dviejų tos sienos priešingų kraštinių porų. Turime dvi galimas situacijas: arba gausime 4 lygiagrečias briaunas, arba dvi poras priešingose kubo sienose esančių briaunų, kurios nėra visos lygiagrečios. Kube 4 lygiagrečias briaunas galime pasirinkti 3 būdais (12 kubo briaunų sudaro 3 tarpusavyje lygiagrečių briaunų ketvertus). Kad gautume antrą situaciją, turime pasirinkti priešingų kubo sienų, kuriose bus mūsų briaunos, porą (tai galima padaryti 3 būdais), o tada vienoje iš tų dviejų sienų pasirinkti priešingų kraštinių porą (tai galima padaryti 2 būdais). Kitoje iš pasirinktų sienų dvi briaunas galima parinkti tik vienu būdu, kad visos 4 briaunos nebūtų lygiagrečios. Taigi antrą situaciją galime gauti $3 \cdot 2 = 6$ būdais.
Visus $3 + 6 = 9$ keturių briaunų parinkimo būdus pavaizduokime:

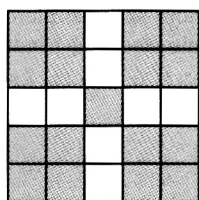


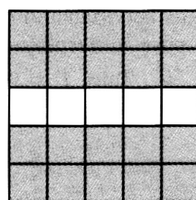
Teisingas atsakymas **C**.

J30. Ⓔ

? Užtenka pastebėti, kad tinka n reikšmės 4, 5 ir 6 (žr. paveikslėlį).


$n = 4$

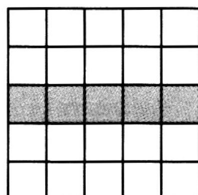

$n = 5$


$n = 6$

Jos įtrauktos tik į atsakymą **E**.
Renkamės atsakymą **E**.

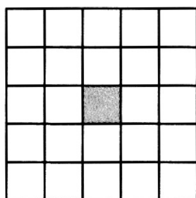
?? Tarkime, kas tam tikra n reikšmė tenkina uždavinio sąlygą: norimas nudažymas egzistuoja. Imkime to nudažymo negatyvą: nudažytus langelius paverskime nenudažytais ir atvirkščiai. Pradinėje lentelėje bet kuriame kvadrate 3×3 buvo n nudažytų langelių, tad naujoje lentelėje bet kuriame tokiame kvadrate nudažytų langelių bus $9 - n$. Vadinasi, tinka ir reikšmė $9 - n$; jei tinka $n = 1$, tai tinka ir $n = 9 - 1 = 8$, ir t. t. Šis pastebėjimas mums iš karto padeda atmesti atsakymus **A**, **B** ir **C**.

Kad atmestume **D**, pakanka sugalvoti nudažymą, kai $n = 3$, 4, 5 arba 6. Lentelę, kur $n = 3$, dabar galime gauti kaip lentelės, kur $n = 9 - 3 = 6$, negatyvą:

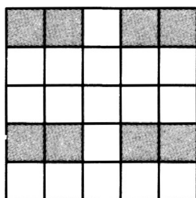


$n = 3$

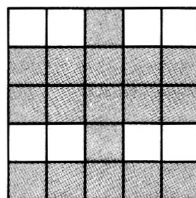
! Kad pagrįstume atsakymą **E**, įsitikinkime, kad n gali būti ir 1, 2, 7 ir 8:



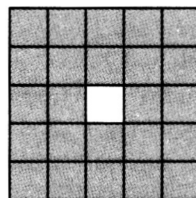
$n = 1$



$n = 2$

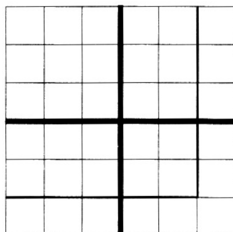


$n = 7$



$n = 8$

Skaitytojui gali iškilti natūralus klausimas: kaipgi galime sugalvoti visus šiuos nudažymus? Visų pirma, mūsų pateikti lentelės nudažymai nėra vieninteliai. O gauti juos galima kad ir taip. Pratęskime lentelę 5×5 iki lentelės 6×6, o ją padalinkime į 4 kvardatus 3×3 (žr. paveikslėlį).



Kiekvieną iš šių 4 kvadratų nudažykime vienodai. Tokiu atveju lentelės 5×5 pirmoji ir ketvirtoji (nuo viršaus) eilutės sutaps, lygiai kaip ir antroji ir penktoji eilutės, pirmasis ir ketvirtasis bei antrasis ir penktasis (iš kairės) stulpeliai. Taigi eilutės ir stulpeliai tiesiog kartojasi kas tris.
Imkime kairįjį viršutinį lentelės kvadratą 3×3 ir pastumkime jį per vieną eilutę žemyn. Tada antroji ir trečioji šio kvadrato eilutės liks jame (jos taps atitinkamai pirmąja ir antrąja), o viršutinę eilutę, kuri yra visos lentelės pirmosios eilutės fragmentas, pakeis jai identiškas ketvirtosios eilutės fragmentas. Taigi naujo kvadrato eilutės nudažymo požiūriu bus tokios pat, kaip pradinio, tik paimtos kita tvarka. Todėl ir nudažytų langelių skaičius kvadrate nepakis. Analogiškai nepakis nudažytų langelių skaičius ir toliau stumdant kvadratą 3×3 aukštyn, žemyn, kairėn ar dešinėn. Vadinasi, taip nudažius lentelę visuose jos kvadratuose 3×3 yra toks pats nudažytų langelių skaičius, kaip ir viršutiniame kairiajame kvadrate. Kad tas skaičius būtų lygus n, tereikia šiame kvadrate bet kaip nudažyti lygiai n langelių, o tai visada galima padaryti, kai $1 \leqslant n \leqslant 8$.
(Pastebėkime, kad šį langelių dažymo būdą gali pritaikyti bet kokių matmenų lentelei ir jos bet kokių matmenų stačiakampėms dalims.)
Teisingas atsakymas **E**.

SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. Ⓐ
Žr. Junioro 4 uždavinio sprendimą.

S2. Ⓑ
Žr. Junioro 12 uždavinio sprendimą.

S3. Ⓐ
! Raskime 2^{xy}:

$$2^{xy} = (2^x)^y = 15^y = 32 = 2^5.$$

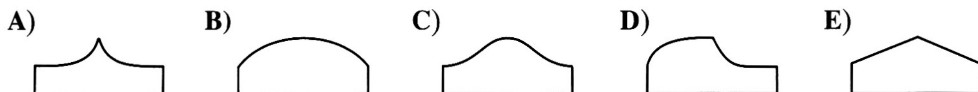
Taigi $xy = 5$.
Teisingas atsakymas **A**.

S4. Ⓒ
Žr. Junioro 19 uždavinio sprendimą.

S5. Ⓓ
Žr. Junioro 7 uždavinio sprendimą.

S6. Ⓒ
Žr. Junioro 9 uždavinio sprendimą.

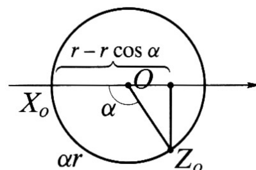
S7. Ⓒ
? Greičiausias būdas pasirinkti atsakymą — vadovautis geometrine nuojauta.
Galima numanyti, kad kuo mažesnį ritinio ruoželį pasirinksime, tuo „tiesesnis" jis bus, t. y. tuo mažiau jis skirsis nuo plokštumos, todėl jį visiškai ištiesinus, jam priklausanti lapo kirpimo linijos dalis mažai tepasikeis. Vaizduotė turėtų mums patarti, kad kirpimo linija turi liestinę kiekviename savo taške (įskaitant ir horizontalias liestines aukščiausiame ir žemiausiame linijos taškuose). Todėl ir išvyniojus tūtelę kirpimo linija turi liestinę kiekviename taške ir dviejuose taškuose liestinės lieka horizontalios. Tačiau atsakyme **A** kirpimo linija neturi liestinės savo aukščiausiame taške, atsakyme **B** — žemiausiame, o atsakymuose **D** ir **E** — abiejuose.



Renkamės atsakymą **C**.

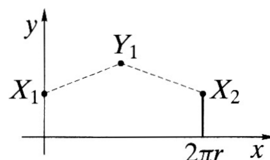
?? Intuicija gali mums taip pat patarti, kad išvyniota tūtelės dalis privalo turėti simetrijos ašį, ir todėl netinka atsakymas **D**. (Iš tiesų, tiek ritinys, tiek jį kertanti plokštuma yra simetriški plokštumos, einančios per ritinio ašį ir jos projekciją ritinį kertančioje plokštumoje, atžvilgiu.)
Kiek subtilesnis pastebėjimas būtų, kad ritinio bei plokštumos sankirta yra simetriška vieno ritinio ašies taško (esančio duotoje plokštumoje) atžvilgiu, o todėl popieriaus lapo kirpimo linija yra tokia pat tiek aukščiausiame, tiek jam simetriškame žemiausiame tūtelės taške. Tad jei aukščiausiame taške apatinės lapo dalies kraštas turi smailumą, tai žemiausiame taške jis negali turėti horizontalios liestinės. Dėl to netinka atsakymas **A** ir, analogiškai, atsakymas **B**.

Pagaliau galima nujausti, kad netinka ir atsakymas **E**. Tegu ritinio pagrindo spindulys yra r, o žemiausio kirpimo taško projekcija į pagrindo plokštumą yra taškas X_O (žr. paveikslėlį, kuriame pavaizduotas ritinio pagrindas). Tegu, be to, Z yra bet kuris kirpimo linijos taškas, Z_O — jo projekcija į ritinio pagrindo plokštumą, o α — kampo $X_O O Z_O$ didumas.



Kaip kinta taško Z aukštis, kintant α? Plokštumos taškų aukštis didėja tiesiškai, judant išilgai ašies $X_O O$, t. y. tas aukštis tiesiškai priklauso nuo dydžio $r - r\cos\alpha$ (atstumo nuo taško X_O iki taško Z_O projekcijos į ašį $X_O O$). Tačiau atsakyme **E** kirpimo linijos taškų aukštis tiesiškai priklauso nuo jų atstumo iki kairiojo figūros krašto, kurį sulenkus lapą atitinka apskritimo lanko ilgis αr. Bet jei tas aukštis tiesiškai priklauso nuo α, tai jis negali tiesiškai priklausyti nuo $\cos\alpha$. Todėl atsakymas **E** blogas.
Renkamės atsakymą **C**.

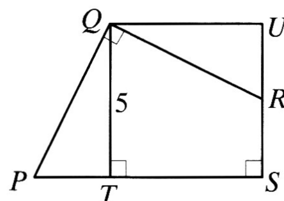
! Pasinaudokime **??** gauta informacija ir įrodykime, kad kirpimo linija išvyniotoje tūtelės dalyje yra sinusoidės lankas. Tam išvyniotosios dalies plokštumoje įveskime koordinačių sistemą, kaip parodyta paveikslėlyje.
Jame koordinačių sistemos pradžia sutampa su išvyniotosios dalies kairiuoju apatiniu kampu, o Ox ašis eina per jos apatinį kraštą.



Taškai X_1 ir X_2 atitinka žemiausią kirpimo linijos tašką, o taškas Y_1 — aukščiausią.
?? dalyje nustatėme, kad kirpimo linijos taškų aukštis (t. y. y koordinatė) tiesiškai priklauso nuo $r - r\cos\alpha$, t. y. egzistuoja tokie skaičiai k ir b, kad tas aukštis kiekvienam α lygus $k(r - r\cos\alpha) + b =$ $= k_1\cos\alpha + b_1$, kur $k_1 = -kr$, $b_1 = kr + b$, o tokio taško x koordinatė tada yra lygi $r\alpha$. Vadinasi, kirpimo linijos taškų koordinates sieja sąryšis $y = k_1\cos\alpha + b_1 = k_1\cos(\frac{x}{r}) + b_1$. Todėl kirpimo linija yra funkcijos $y = k_1\cos(\frac{x}{r}) + b_1$ grafiko dalis ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi r$). Šis grafikas yra sinusoidė, kuri nuo paprastesnės sinusoidės $y = \cos x$ skiriasi periodu ($2\pi r$ vietoje 2π) ir svyravimo amplitude (funkcija svyruoja tarp reikšmių $-k_1 + b_1$ ir $k_1 + b_1$). Sinusoidės svyravimą per visą jos periodą $2\pi r$ matome atsakyme **C**.
Teisingas atsakymas **C**.

S8. Ⓒ

! Šį uždavinį patogu spręsti papildant brėžinį ir randant naujos figūros plotą.
Tegu tiesė, einanti per tašką Q ir lygiagreti tiesei PS, tiesę RS kerta taške U (žr. brėžinį). Keturkampio $QUST$ priešingos kraštinės lygiagrečios, o kampai statūs, todėl jis yra stačiakampis. Nesunku įsitikinti, kad trikampiai PQT ir RQU lygūs. Iš tiesų,



1) $\angle PQT = \angle PQR - \angle TQR = 90^\circ - \angle TQR = \angle TQU - \angle TQR = \angle RQU$;
2) $\angle QPT = 180^\circ - \angle PQT - \angle PTQ = 180^\circ - \angle RQU - 90^\circ = 180^\circ - \angle RQU - \angle QUR = \angle QRU$;
3) $PQ = QR$ (duota).
Taigi $\Delta PQT = \Delta RQU$ pagal kraštinę ir du kampus prie jos. Gauname, kad $QU = QT = 5$. Mums reikia rasti trikampio PQT ir keturkampio $QRST$ plotų sumą, kuri yra lygi trikampio RQU ir keturkampio $QRST$ plotų sumai, t. y. stačiakampio $QUST$ plotui. Tačiaus stačiakampio plotas lygus ilgio ir pločio sandaugai $QT \cdot QU = 5 \cdot 5 = 25$. Tai ir yra ieškomas plotas.
Teisingas atsakymas **C**.

S9. Ⓒ 671

? Atsakymą galima „primesti iš akies“. Tereikia pastebėti, kad užrašytų skaičių sekoje 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... iš 3 dalijasi kas trečias skaičius, t. y. Balys nutrynė apytiksliai trečdalį užrašytų skaičių, o lentoje tada liko apytiksliai $\frac{2}{3}$ jų. Kadangi iš skaičių nuo 1 iki 2011 buvo užrašyti tik nelyginiai, t. y. tik apytiksliai pusė iš 2011 skaičių, tada iš jų palikta tik $\frac{2}{3}$, tai lentoje liko apytiksliai $2011 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} =$ $= \frac{2011}{3}$ skaičių. Pakankamai artimas tokiam skaičiui yra atsakymas 671.
Renkamės atsakymą **C**.

! Kaip greitai nustatyti, kiek natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 2011 dalijasi, tarkim, iš 6? Kadangi $2011 =$ $= 335 \cdot 6 + 1$, tai visus šiuos skaičius be vieno paskutiniojo galima suskirstyti į 335 šešetus $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(7, 8, 9, 10, 11, 12)$, ..., $(2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010)$. Kiekviename skai-

čių šešete iš 6 dalijasi lygiai vienas (6-asis) skaičius, taigi iš 6 besidalijančių skaičių yra tiek pat, kiek ir skaičių šešetų, t. y. 335. Panašiai gauname, kad nuo 1 iki 2011 yra 1005 nelyginiai skaičiai ($2011 = 1005 \cdot 2 + 1$) ir 670 skaičių, dalių iš 3 ($2011 = 670 \cdot 3 + 1$). Lentoje liko būtent tie iš skaičių, kurie nesidalija nei iš 2, nei iš 3. Taigi norėdami gauti, kiek skaičių liko, turime iš visų skaičių kiekio atimti kiekius skaičių, besidalijančių iš 2 ir besidalijančių iš 3: $2011 - 1005 - 670 = 336$. Tačiau tokiu būdu mes skaičius, kurie dalijasi vienu metu ir iš 2, ir iš 3 (t. y. dalijasi iš 6) iš bendro skaičių kiekio atėmėme po 2 kartus (kiekvienas toks skaičius įeina ir į 1005, ir į 670 skaičių aibę). Kad tai atitaisytume ir kad kiekvienas toks skaičius būtų išmestas tik po vieną kartą, šių skaičių (viengubą) kiekį 335 turime pridėti. Taip gauname, kad lentoje liko $336 + 335 = 671$ skaičius.
Teisingas atsakymas **C**.

S10. Ⓑ

! Tarkime, kad metama n kauliukų. Juos galime sunumeruoti — nustatyti, kuris iš jų pirmas, kuris antras, ir t. t. Metimo rezultatas yra n skaičių nuo 1 iki 6, kuriuos rodo atvirtę kauliukai (tokiu būdu iš viso galime gauti

$$p = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6}_{n \text{ kartų}} = 6^n$$

skirtingų rezultatų). Kadangi kiekvienas kauliukas atvirsta bet kuriuo skaičiumi su ta pačia tikimybe $\frac{1}{6}$, tai ir visi n kauliukų metimo rezultatai yra vienodai galimi. Todėl tikimybė, kad neatvirs nė viena šešakė, lygi $\frac{p_0}{p}$, kur p_0 yra metimo rezultatų, kai neatvirsta nė viena šešakė, skaičius. Taip pat ir antroji tikimybė lygi $\frac{p_1}{p}$, kur p_1 yra metimo rezultatų, kai atvirsta lygiai viena šešakė, skaičius. Jei neatvirto nei viena šešakė, tai metimo rezultatas bus bet kuris n skaičių nuo 1 iki 5 rinkinys. Tokių rinkinių yra

$$p_0 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{n \text{ kartų}} = 5^n.$$

Jei atvirto lygiai viena šešakė ir ją rodo pirmasis kauliukas, tai likę $n - 1$ kauliukas vėlgi yra bet kuris skaičių nuo 1 iki 5 rinkinys, tad gauname

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{n-1 \text{ kartų}} = 5^{n-1}$$

rezultatų (įskaitant ir tą atvejį, kai $n = 1$). Jei atvirto lygiai viena šešakė ir ją rodo antrasis kauliukas, vėl turime 5^{n-1} rezultatų, ir t. t. Šešake galėjo atvirsti bet kuris iš n kauliukų, todėl

$$p_1 = \underbrace{5^{n-1} + 5^{n-1} + \cdots + 5^{n-1}}_{n \text{ kartų}} = n \cdot 5^{n-1}.$$

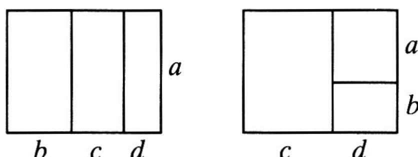
Belieka išsiaiškinti, su kuriais n galioja lygybė $\frac{p_0}{p} = \frac{p_1}{p}$, arba $\frac{5^n}{p} = \frac{n \cdot 5^{n-1}}{p}$.
$5^n = n \cdot 5^{n-1}$; vadinasi, $5 = n$.
Teisingas atsakymas **B**.

S11. Ⓓ

? Pastebėkime, kad trečiojo stačiakampio matmenys gali būti 7×8 (žr. paveikslėlį). Didesniojo stačiakampio 7×11 nepavyks gauti. Renkamės atsakymą **D**.

11×7	4×8
	7×8

Įrodysime, kad didesnio ploto stačiakampio pasirinkti negalime.
Suprantama, kad 4 statieji sudarytojo stačiakampio kampai turi sutapti su stačiakampių, iš kurių jis sudarytas, kampais. Kadangi tų stačiakampių yra tik 3, o kampai yra 4, tai 2 kampai priklausys vienam stačiakampiui, Jei tai būtų priešingi sudarytojo stačiakampio kampai, tai ir kitame stačiakampyje jie būtų priešingi. Tada sudarytasis stačiakampis sutaptų su vienu iš trijų pradinių ir kitiems dviem neliktų vietos. Vadinasi, kampai turi būti gretimi ir didžiojo stačiakampio dalis, sudaryta iš dviejų stačiakampių, taip pat bus stačiakampis, kurio 2 gretimi kampai ir vėl turės sutapti su vieno iš jį suradančių stačiakampių kampais. Gauname dvi galimas situacijas:



Abiem atvejais kraštinių ilgius pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje.
Pirmuoju atveju trijų stačiakampių matmenys yra $a \times b$, $a \times c$ ir $a \times d$ — visų jų vienas iš matmenų yra a. Tačiau stačiakampių 7×11 ir 4×8 jokie du matmenys nesutampa, todėl pirmoji situacija negalima.
Antruoju atveju stačiakampių matmenys yra $(a+b) \times c$, $a \times d$ ir $b \times d$. Pastarųjų dviejų stačiakampių vienas matmuo d vėl sutampa, todėl vienas iš stačiakampių 7×11 ir 4×8 turi būti stačiakampis $(a+b) \times c$. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad kitas iš jų sutampa su stačiakampiu $a \times d$ (kitaip apverstume paveikslėlį aukštyn kojomis ir apkeistume vietomis žymenis a ir b). Galimi 8 atvejai:
1) $a+b=7$, $c=11$, $a=4$, $d=8$;
2) $a+b=11$, $c=7$, $a=4$, $d=8$;
3) $a+b=7$, $c=11$, $a=8$, $d=4$;
4) $a+b=11$, $c=7$, $a=8$, $d=4$;
5) $a+b=4$, $c=8$, $a=7$, $d=11$;
6) $a+b=4$, $c=8$, $a=11$, $d=7$;
7) $a+b=8$, $c=4$, $a=7$, $d=11$;
8) $a+b=8$, $c=4$, $a=11$, $d=7$.
Atvejus 3), 5), 6) ir 8) iš karto atmetame: skaičius $a+b$ turi būti didesnis už skaičių a. Likusiais keturiais atvejais gauname tokius galimus trečiojo stačiakampio matmenis $b \times d$: 1) 3×8; 2) 7×8; 4) 3×4; 7) 1×11. Iš jų pasirenkame didžiausio ploto stačiakampio matmenis 7×8.
Teisingas atsakymas **D**.

S12. (E)

Šis uždavinys gana panašus į uždavinį **J18**. Panašūs yra ir šių uždavinių sprendimai, tačiau gaunami rezultatai skirtingi.
Kaip ir **J18**, įrašytinus skaičius pažymėkime raidėmis x, y, z, t, u (žr. paveikslėlį).

x	2	y
1	u	3
z	4	t

Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybės:

$$\begin{cases} x+u+1+2=10, \\ y+u+2+3=10, \\ z+u+1+4=10, \\ t+u+3+4=10, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} x+u=7, \\ y+u=5, \\ z+u=5, \\ t+u=3. \end{cases}$$

Kadangi kiekvienoje lygtyje yra nežinomasis u ir vienas iš likusių keturių nežinomųjų, natūralu pamėginti išreikšti visus nežinomuosius nežinomuoju u ir tada žiūrėti, kam bus lygi jų suma:

$$x + y + z + t + u = (7 - u) + (5 - u) + (5 - u) + (3 - u) + u = 20 - 3u.$$

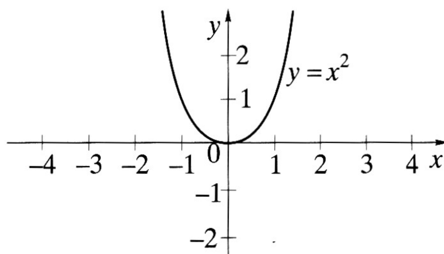
Kokias gi reikšmes gali įgyti ši išraiška? u yra sveikasis skaičius: $u = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, tada suma įgyja reikšmes $\dots, 26, 23, 20, 17, 14, 11, \dots$. Šiai sekai priklauso kas trečias sveikasis skaičius, o skaičiai 9, 10, 12 bei 13 jai nepriklauso. Tai būtų galima taip pagrįsti: $20 - 3u = 3(6 - u) + 2$, taigi suma dalijasi iš 3 su liekana 2. Todėl skaičiai 9, 10, 12 ir 13 netinka — jie iš 3 dalijasi su liekana 0 arba 1.
Teisingas atsakymas **E**.

S13. Ⓓ

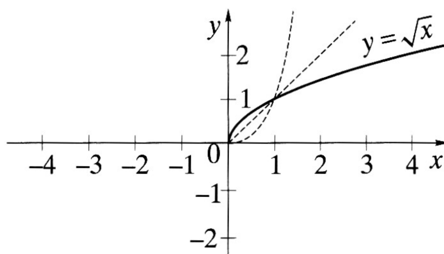
! Suskirstykime žygio dalyvius į grupeles po vieną, du, tris, keturis berniukus kiekvienoje, kad bet kuris berniukas būtų grupelėje su visais savo broliais, taip pat dalyvavusiais žygyje. Didesnių grupelių nesusidarys: berniukai, neturėję žygyje brolio, priklausys grupelėms iš vieno žmogaus; turėjusieji lygiai vieną brolį — grupelėms iš dviejų žmonių (sudarytų iš jų pačių ir jų brolio); turėjusieji du — grupelėms iš trijų žmonių; o turėjusieji tris — grupelėms iš keturių.
Grupelėms po du žmones priklauso šeši berniukai, todėl turime $6 : 2 = 3$ tokias grupeles (t. y. 3 šeimas). Analogiškai grupelių po tris žmones yra $9 : 3 = 3$, o po keturis — $4 : 4 = 1$ grupelė. Brolių žygyje neturėjo $48 - 6 - 9 - 4 = 29$ berniukai; taigi turime dar 29 grupeles. Iš viso šeimų, kurioms priklauso žygio dalyviai, gauname $3 + 3 + 1 + 29 = 36$-ias.
Teisingas atsakymas **D**.

S14. Ⓓ

! Pavaizduokime visų funkcijų grafikus. Funkcijos $y = x^2$ grafikas yra parabolė.

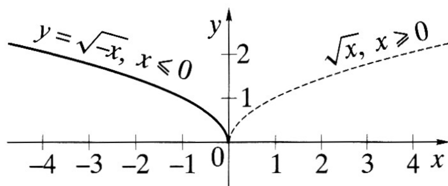


Funkcija $y = \sqrt{x}$ yra apibrėžta tik neneigiamoms kintamojo reikšmėms ir pati įgyja tik neneigiamas reikšmes, todėl jos grafikas priklausys I koordinačių sistemos ketvirčiui. Be to, ši funkcija savo apibrėžimo srityje yra atvirkštinė funkcijai $y = x^2$, apribotai neneigiamomis x reikšmėmis, todėl jos grafikas yra simetriškas funkcijos $y = x^2$ grafiko daliai, esančiai I ketvirtyje, tiesės $y = x$ atžvilgiu.



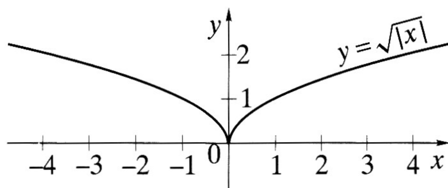
Dabar nagrinėkime funkciją $y = \sqrt{-x}$. Pastebėkime, kad jei $(x; y)$ yra šios funkcijos grafiko taškas, tai $(-x; y)$ yra funkcijos $y = \sqrt{x}$ taškas. Be to, galioja ir atvirkštinis teiginys. Taškai $(x; y)$

ir $(-x; y)$ yra simetriški ašies Oy atžvilgiu, todėl ir funkcijų $y = \sqrt{x}$ ir $y = \sqrt{-x}$ grafikai bus simetriški vienas kitam.

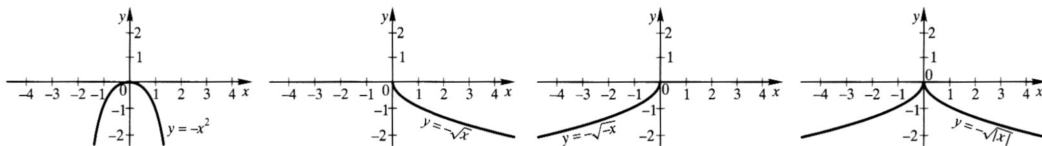


Nagrinėkime funkciją $y = \sqrt{|x|}$. Prisiminkime modulio apibrėžimą: $|x| = \left[\begin{array}{ll} x, & \text{kai } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{kai } x < 0. \end{array}\right.$

Taigi $\sqrt{|x|} = \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}, & \text{kai } x \geqslant 0; \\ \sqrt{-x}, & \text{kai } x < 0. \end{array}\right.$ Tai reiškia, kad plokštumos dalyje, kur $x \geqslant 0$, funkcijos $y = \sqrt{|x|}$ grafikas sutampa su funkcijos $y = \sqrt{x}$, o likusioje dalyje — su funkcijos $y = \sqrt{-x}$ grafiku.



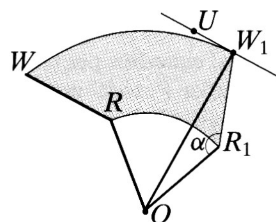
Nagrinėkime funkciją $y = -x^2$. Palyginkime ją su funkcija $y = x^2$. Jei taškas $(x; y)$ priklauso funkcijos $y = -x^2$ grafikui, tai taškas $(x; -y)$ priklauso funkcijos $y = x^2$ grafikui, ir atvirkščiai. Kadangi taškai $(x; y)$ ir $(x; -y)$ yra simetriški ašies Ox atžvilgiu, tai ir funkcijos $y = -x^2$ grafikas yra simetriškas funkcijos $y = x^2$ grafikui ašies Ox atžvilgiu. Analogiškai ir likusių funkcijų $y = -\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{|x|}$ grafikai yra simetriški atitinkamai funkcijų $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = \sqrt{|x|}$ grafikams Ox atžvilgiu.



Uždavinio brėžinyje galima įžvelgti visų funkcijų, išskyrus dvi ($y = x^2$ ir $y = -x^2$), grafikus, t. y. mums tinka 6 funkcijos.
Teisingas atsakymas **D**.

S15. Ⓑ

! Taškus, į kuriuos perėjo valytuvo mentės ir svirties galai R ir W, pažymėkime R_1 ir W_1 (žr. paveikslėlį). Be to, kampo, lygaus β, spindulyje, priklausančiame nuvalytosios srities viršutinio krašto liestinei, pažymėkime tašku U. Mums reikia rasti $\beta = \angle UW_1R_1 = \angle UW_1O + \angle OW_1R_1$.
Pasukus valytuvą, nei mentės ir svirties ilgiai, nei kampas tarp jų nepasikeitė, todėl $\angle OR_1W_1 = \angle ORW = \alpha$ ir $OR_1 = OR = RW = R_1W_1$. Vadinasi, trikampis OR_1W_1 yra lygia-



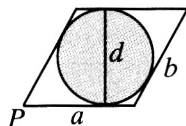
šonis ir $\angle OW_1R_1 = \angle W_1OR_1$. Raskime $\angle OW_1R_1$: $\pi = \angle OR_1W_1 + \angle OW_1R_1 + \angle W_1OR_1 = \alpha + 2\angle OW_1R_1$; $\angle OW_1R_1 = \frac{\pi-\alpha}{2}$.
Sukant valytuvą nekito laisvojo mentės galo atstumas iki sukimo centro O, todėl viršutinis srities kraštas, kuriuo judėjo laisvas mentės galas, yra apskritimo su centru O ir spinduliu, lygiu $OW = OW_1$, lankas. Apskritimo liestinė UW_1 yra statmena jo spinduliui OW_1, t. y. $\angle UW_1O = \frac{\pi}{2}$.
Randame β:

$$\beta = \angle UW_1O + \angle OW_1R_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi-\alpha}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2}.$$

Teisingas atsakymas **B**.

S16. Ⓐ

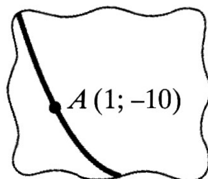
! Įrodysime, kad lygiagretainio x plotas lygus Z.
Nagrinėkime lygiagretainį, į kurį įbrėžtas ploto Y skritulys. Tegu to skritulio skersmuo lygus d, o lygiagretainio kraštinės lygios a ir b (žr. paveikslėlį). Lygiagretainio plotas lygus aukštinės ir kraštinės sandaugai, t. y. $d\cdot a$ (aukštinės ilgis lygus skritulio skersmeniui). Tačiau taip pat gauname, kad plotas lygus $d\cdot b$. Todėl $a = b$, ir lygiagretainis yra rombas.



Analogiškai gauname, kad ir tas lygiagretainis, į kurį įbrėžtas ploto T skritulys, yra rombas, ir visos jo kraštinės lygios. Vadinasi, ploto Z lygiagretainis ir lygiagretainis x turi to paties ilgio kraštines. Be to, du šių lygiagretainių kampai yra lygūs kaip kryžminiai, todėl ir likę jų kampai atitinkamai lygūs. Taigi šie lygiagretainiai yra lygūs ir lygiagretainio x plotas lygus Z. Gavome, kad norint rasti lygiagretainio x plotą, užtenka žinoti vienintelį skaičių Z.
Teisingas atsakymas **A**.

S17. Ⓔ

? Matome, kad parabolės šakos kyla aukštyn, todėl $a > 0$. Funkcijos $y = ax^2+bx+c$ reikšmė taške $x = 1$ yra lygi -10: $a+b+c = -10 < 0$. Mažiausią reikšmę ši funkcija įgyja taške $x = -\frac{b}{2a}$. Paveikslėlyje matome, kad šis minimumo taškas yra į dešinę nuo taško $x = 1$, t. y. $-\frac{b}{2a} > 1$, arba $b < -2a < 0$.
Kadangi funkcija įgyja neigiamą reikšmę -10, o parabolės šakos nukreiptos į viršų, tai jos abi kerta abscisių ašį. Vadinasi, kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ turi dvi skirtingas šaknis, o jo diskriminantas $b^2 - 4ac$ yra teigiamas skaičius: $b^2 > 4ac$.
Įrodėme, kad nelygybės **A**, **B**, **C** ir **D** yra teisingos.
Renkamės atsakymą **E**.



! Įsitikinkime, kad nelygybė **E** gali būti klaidinga. Tam imkime $a = 1$, $b = -11$, $c = 0$. Matome, kad parabolės lankas gali priklausyti funkcijos $y = x^2 - 11x$ grafikui. Šiuo atveju parabolės šakos kyla aukštyn ir taškas $A(1; -10)$ priklauso kairiajai šakai, kaip ir pavaizduota paveikslėlyje.
Teisingas atsakymas **E**.

S18. Ⓓ

! Apskritimo ir kraštinių PQ, QR, RS, ST, TU ir UP lietimosi taškus atitinkamai pažymėkime P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 ir U_1.
Tiesės, einančios per taškus P ir P_1 bei per taškus P ir U_1, yra apskritimo liestinės, išvestos per tą patį tašką P, todėl atstumai nuo P iki lietimosi taškų P_1 ir U_1 yra lygūs: $PP_1 = PU_1$.
Analogiškai $QQ_1 = QP_1$, $RR_1 = RQ_1$, $SS_1 = SR_1$, $TT_1 = TS_1$, $UU_1 = UT_1$. Pastebėkime, kad $PQ + RS + TU = (PP_1 + QP_1) + (RR_1 + SR_1) + (TT_1 + UT_1) = (PU_1 + QQ_1) + (RQ_1 + SS_1) + (TS_1 + UU_1) = (QQ_1 + RQ_1) + (SS_1 + TS_1) + (UU_1 + PU_1) = QR + ST + UP$.
T. y. $4 + 6 + 8 = 5 + 7 + UP$ ir $UP = 6$.
Teisingas atsakymas **D**.

S19. Ⓐ

? Lengva pastebėti, kad tinka skaičius $x = 9$: $x^2 - 81 = 9^2 - 81 = 0$. Taip pat nesunku rasti kitą galimą reikšmę $x = 91$: tada $x + 9$ dalijasi iš 100, todėl dalijasi ir $x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9)$. Kiek sunkiau rasti dar dvi reikšmes. Tam reikia ieškoti tokių skaičių, kad $x - 9$ ar $x + 9$ jei ir nesidalytų iš 100, tai bent jau iš 50. Taip randame tinkamas reikšmes $x = 41$ ir $x = 59$: $41^2 - 81 = (41 - 9)(41 + 9) = 32 \cdot 50 = 1600$ ir $59^2 - 81 = (59 - 9)(59 + 9) = 50 \cdot 68 = 3400$. Ieškoma reikšmių suma jau yra mažiausiai $9+91+41+59 = 200$, taigi mums tinka tik atsakymas **A**. Renkamės atsakymą **A**.

! Įsitikinkime, kad kitų reikšmių be rastųjų skaičius x įgyti negali.
Visų pirma, $x^2 - 81$ dalijasi iš 2, todėl x yra nelyginis skaičius. Kadangi $x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9)$ dalijasi iš $25 = 5 \cdot 5$, tai arba vienas iš dauginamųjų $x - 9$ ir $x + 9$ dalijasi iš 25, arba kiekvienas iš jų dalijasi iš 5. Antruoju atveju iš 5 turėtų dalytis ir skirtumas $(x + 9) - (x - 9) = 18$. Taip būti negali, todėl lieka pirmasis atvejis. Kadangi x yra nelyginis skaičius, tai skaičiai $x + 9$ ir $x - 9$ yra lyginiai. Tad vienas iš jų turi dalytis ne tik iš 25, bet net iš 50. Kadangi $0 < x < 100$, tai $-9 < x - 9 < x + 9 < 109$. Vadinasi, $x - 9$ arba $x + 9$ turi įgyti vieną iš reikšmių 0, 50 arba 100. Tiesiogiai patikrinę šias galimybes gauname tik jau rastąsias x reikšmes.
Teisingas atsakymas **A**.

S20. Ⓑ

! Iš Algio teiginio aišku, kad klubui priklauso lygiai penkios mergaitės. Be to, klubui priklauso bent du berniukai — Algis ir Bronius. Jei klubui priklausytų bent trys berniukai, tai Broniaus teiginys būtų klaidingas: galėtume sudaryti šešių klubo narių grupę iš trijų berniukų ir trijų mergaičių. Todėl berniukų yra lygiai du, o vaikų iš viso yra 5+2=7.
Teisingas atsakymas **B**.

S21. Ⓑ

! Maiše gulinčius rutulius galima suskirstyti į keturias nesikertančias aibes:
1) pažymėtuosius skaičiais, kurie nėra nei skaičiaus 6, nei skaičiaus 7 kartotiniai;
2) pažymėtuosius skaičiais 6, bet ne skaičiaus 7 (t. y. ne skaičiaus 42) kartotiniais;
3) pažymėtuosius skaičiais 7, bet ne skaičiaus 6 (t. y. vėlgi ne skaičiaus 42) kartotiniais;
4) pažymėtuosius abiejų skaičių 6 ir 7 (t. y. skaičiaus $42 = 6 \cdot 7$) kartotiniais.
Kiekvienas 42 kartotinis yra kartu ir 6 kartotinis, todėl 2-ąją aibę sudaro $30 - 10 = 20$ rutulių. Analogiškai 3-ąją aibę sudaro $20 - 10 = 10$ rutulių. 4-ąją aibę pagal sąlygą sudaro 10 rutulių. Maiše turime mažiausiai $20 + 10 + 10 = 40$ rutulių, bet tai ir yra ieškomas kiekis, nes rutulius galima pažymėti taip, kad dar nenagrinėta 1-oji aibė būtų tuščia. Tereikia pažymėti 20 rutulių bet kuriais 6 kartotiniais, nesidalijančiais iš 7, 10 rutulių — bet kuriais 7 kartotiniais, nesidalijančiais iš 6, ir dar 10 — bet kuriais 42 kartotiniais. Tada 6 kartotiniais bus iš viso pažymėta $20 + 10 = 30$, o 7 kartotiniais — $10 + 10 = 20$ rutulių. Ir uždavinio sąlyga bus tenkinama.
Teisingas atsakymas **B**.

S22. Ⓒ

! Tarkime, kad $a_1, a_2, a_3 \ldots$ yra viena iš ieškomų progresijų, o jos skirtumas lygus d. Kadangi aritmetinės progresijos skirtumas lygus bet kurių dviejų gretimų progresijos narių skirtumui, o tie nariai yra natūralieji skaičiai, tai d yra sveikasis skaičius. Jei $d \leqslant 0$, tai progresijoje visi nariai neviršija pirmojo, t. y. progresijoje yra tik baigtinis kiekis skirtingų natūraliųjų reikšmių. Todėl d yra natūralusis skaičius.
Matome, kad progresijai turi priklausyti skaičiai 5, 20, 35 ir 61. Tegu $a_k = 5$, $a_l = 20$, $a_m = 35$ ir $a_n = 61$. Pasinaudoję bendrojo progresijos nario formule gauname, kad $a_k = a_1 + (k - 1)d$, $a_l = a_1 + (l - 1)d$ ir $15 = a_l - a_k = (l - k)d$. Analogiškai $26 = a_n - a_m = (n - m)d$. Taigi d yra skaičių 15 ir 26 daliklis. Tačiau didžiausias bendras šių skaičių daliklis yra 1. Vadinasi, $d = 1$. Be to, $a_1 \leqslant a_k = 5$. Su reikšmėmis $a_1 = 1, 2, 3, 4$ ir 5 gauname penkias tinkamas progresijas, kurių

kiekvienai priklauso visi natūralieji skaičiai, ne mažesni už 5, todėl ir visi abiejų duotųjų progresijų nariai:

$$1, 2, 3, \dots; \qquad 2, 3, 4, \dots; \qquad 3, 4, 5, \dots; \qquad 4, 5, 6, \dots; \qquad 5, 6, 7, \dots.$$

Teisingas atsakymas **C**.

S23. Ⓐ

! Raskime kelių pirmųjų sekos funkcijų reikšmes taške $x = 2011$:

$$\begin{aligned} f_1(2011) &= 2011, \\ f_2(2011) &= \frac{1}{1 - f_1(2011)} = -\frac{1}{2010}, \\ f_3(2011) &= \frac{1}{1 - f_2(2011)} = \frac{2010}{2011}, \\ f_4(2011) &= \frac{1}{1 - f_3(2011)} = 2011, \\ f_5(2011) &= \frac{1}{1 - f_4(2011)} = -\frac{1}{2010} \text{ ir t. t.} \end{aligned}$$

Nesunku pastebėti, kad reikšmės ima kartotis. Iš tiesų, reikšmių sekoje pagal duotąją formulę po 2011 neišvengiamai eis $\frac{1}{1-2011} = -\frac{1}{2010}$, po šios reikšmės eis $\frac{1}{1-(-\frac{1}{2010})} = \frac{2010}{2011}$, o po $\frac{2010}{2011}$ vėl eis $\frac{1}{1-\frac{2010}{2011}} = 2011$ ir t. t. Taigi reikšmės kartosis kas trys, t. y. $2011 = f_1(2011) = f_{1+3}(2011) = = f_{1+2\cdot 3}(2011) = f_{1+3\cdot 3}(2011) = \dots = f_{1+670\cdot 3}(2011) = f_{2011}(2011)$.
Teisingas atsakymas **A**.

S24. Ⓐ

? Tegu dėžėje yra n rutulių, iš kurių k yra žali ir $n - k$ yra raudoni. Uždavinio sąlyga reiškia, kad traukiant du rutulius iš dėžės, lygiai pusėje visų galimų atvejų jie bus vienspalviai, o likusioje pusėje — skirtaspalviai. Kiekgi iš viso yra tų atvejų? Turime parinkti dviejų elementų derinį (du rutulius, kurių traukimo iš dėžės tvarka nesvarbi) iš n elementų. Gerai žinoma, kad aibėje iš n elementų yra $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ derinių iš m elementų. Taigi du rutulius iš n rutulių aibės galima parinkti $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(n-2))} = \frac{n(n-1)}{2}$ būdų. (Beje, šį skaičių galima rasti tiesiogiai: vieną rutulį galima parinkti n būdų, o tada antrąjį — $n - 1$ būdu. Gauname $n(n - 1)$ rutulių porų. Kiekvieną porą skaičiavome du kartus, nes traukdami du rutulius bet kuria tvarka gausime tą pačią jų porą. Taigi turime $\frac{n(n-1)}{2}$ skirtingų rutulių porų.) Analogiškai du žalius rutulius galima ištraukti $\frac{k(k-1)}{2}$ būdų, o du raudonus — $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ būdų. Vadinasi, skaičiai n ir k turi tenkinti lygybę

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Suprastinkime šią lygybę:

$$n = 4k^2 - 4nk + n^2 = (n - 2k)^2.$$

Taigi skaičius n yra tikslus kvadratas. Iš pateiktų atsakymų tinka tik $n = 81 = 9^2$.
Renkamės atsakymą **A**.

! Lieka pastebėti, kad n reikšmė 81 yra galima. Jei $n = 81$, tai $(n - 2k)^2 = 81$ ir $n - 2k = 9$. $2k$ yra arba $81 - 9$ arba $81 + 9$. Abi k reikšmės 36 ir 45 tinka: su šiuo k tenkinama lygybė, gauta ? dalyje, o ji yra pakankama, kad tikimybė ištraukti vienspalvius rutulius būtų $\frac{1}{2}$.
Teisingas atsakymas **A**.

S25. Ⓓ

! Ieškomą svorio normą, už kurią bendrovė neima mokesčio, pažymėkime x (kg), o mokestį už bagažo kilogramą — y (eurų). Tada ponas Klajūnas mokėjo už $60 - x$ savo bagažo kilogramų, t. y. $(60 - x)y = 10{,}5$. Tuo tarpu Skraidūnų šeima galėjo pasidalyti krovinį. Tokiu atveju kiekvienas sutuoktinis galėjo nemokėti daugiausiai už savo x kilogramų, t. y. sumokėti kartu tik už $60 - 2x$ kilogramų bagažo. Jie galėtų tai padaryti, jei $x < 30$, pasidalijęs bagažą į dvi lygiasvores dalis. Tada $(60 - 2x)y = 3$. Padalykime gautąsias dvi lygybes vieną iš kitos: $(60 - x) : (60 - 2x) = 10{,}5 : 3$, arba $60 - x = 3{,}5(60 - 2x)$. Išsprendę šią lygtį gauname $x = 25$. Tada $y = 3 : (60 - 2 \cdot 25) = 0{,}3$. Nesunku patikrinti, kad su šiomis x ir y reikšmėmis jau išnagrinėta uždavinio situacija galima.
Teisingas atsakymas **D**.

S26. Ⓑ

! Reiškinyje matome aštuonias skirtingas raides: K, A, N, G, R, O, M, E. Jei bent viena iš jų lygi 0, tai arba reiškinyje turėtume dalybą iš 0, arba jo reikšmė būtų lygi 0. Nė viena situacija mums netinka, tad turime pasirinkti aštuonis skaitmenis nuo 1 iki 9.
Suprastinkime reiškinį:

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E} = \frac{K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O^2}{M \cdot E}.$$

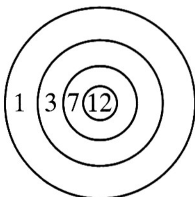
Kadangi $K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O^2 \geqslant 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot O = 120 \cdot O \geqslant 120$ ir $M \cdot E \leqslant 9 \cdot 8 = 72$, tai

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O^2}{M \cdot E} \geqslant \frac{120}{72} > 1.$$

Vadinasi, reiškinio mažiausia reikšmė yra ne mažesnė už 2. Bandykime taip parinkti raidžių reikšmes, kad reikšmė 2 būtų gauta. Užtenka pastebėti du dalykus:
1) raidėms K, A, N, R, O, M, E, figūruojančioms suprastintame reiškinyje, nepavyks suteikti reikšmių 5 ir 7, nes jos nesusiprastina su jokiais kitais skaičiais nuo 1 iki 9:
2) kad reiškinio reikšmė būtų maža, apsimoka pirmiau tikrinti mažas skaitiklio raidžių K, A, N, R, O ir dideles vardiklio raidžių M, E reikšmes.
Vadovaujantis šiais pastebėjimais greitai gaunama, kad tinka reikšmės $O = 1$, $R = 2$, $N = 3$, $A = 4$, $K = 6$, $M = 8$, $E = 9$. Likusiai raidei G galima suteikti dar laisvą reikšmę 5.
Taigi mažiausia galima reiškinio reikšmė yra lygi 2.
Teisingas atsakymas **B**.

S27. Ⓒ

! Įvairiais būdais galima perrinkti visus galimus variantus. Čia pateiksime vieną iš jų.



1) Tegu Robinas Hudas surinko lyginę taškų sumą. Tai reiškia, kad šūviu 12 taškų jis pelnė vieną ar tris kartus. Antruoju atveju jis surinko maksimalią $12 + 12 + 12 = 36$ taškų sumą, o pirmuoju

— $12+1+1=14$, $12+1+3=16$, $12+1+7=20$, $12+3+3=18$, $12+3+7=22$ arba $12+7+7=26$ taškus. Taigi turime 7 lygines reikšmes.

2) Tegu Robinas Hudas šūviu 12 taškų pelnė lygiai du kartus, taip surinkdamas nelyginę taškų sumą, ne mažesnę už $12+12+1=25$. Tada Robinas Hudas surinko $12+12+1=25$, $12+12+3=27$ arba $12+12+7=31$ tašką. Turime 3 reikšmes.
3) Tegu Robinas Hudas nė sykio šūviu nepelnė 12 taškų, taip surinkdamas nelyginę taškų sumą, ne didesnę už $7+7+7=21$. Jei Robinas Hudas bent kartą kliudė sritį, pažymėtą skaičiumi 7, tai jis surinko $7+1+1=9$, $7+1+3=11$, $7+1+7=15$, $7+3+3=13$, $7+3+7=17$ arba $7+7+7=21$ tašką. Jei Robinas Hudas nepelnė jokiu savo šūviu 7 taškų, tai jis 3 taškus pelnė 0, 1, 2 arba 3 kartus ir atitinkamai surinko $1+1+1=3$, $1+1+3=5$, $1+3+3=7$ arba $3+3+3=9$ taškus. Gavome 10 reikšmių, iš kurių dvi sutampa: $7+1+1=3+3+3$. Taigi turime 9 skirtingas reikšmes.
Iš viso Robinas Hudas galėjo surinkti $7+3+9=19$ skirtingų taškų sumų.
Teisingas atsakymas **C**.

S28. Ⓓ

Tegu a, b, c yra skaičiai, tenkinantys uždavinio sąlygą, su kuriais sandauga abc turi mažiausiai daliklių. Duotosios lygybės kai ką pasako apie a, b ir c dalumą iš skaičių 2 ir 3 laipsnių. Pvz., iš karto gauname, kad a ir c dalijasi iš 2, todėl $3c^5$, o kartu ir $2b^3$ dalijasi iš 2^5, o b^3 dalijasi iš 2^4, bet taip gali būti, tik jei b dalijasi iš 2^2, ir t. t. Kad griežtai išnagrinėtume šį klausimą, pažymėkime $a = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}a_1$, $b = 2^{\beta_1}3^{\beta_2}b_1$, $c = 2^{\gamma_1}3^{\gamma_2}c_1$, kur α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 yra sveikieji neneigiami skaičiai, o a_1, b_1, c_1 — natūralieji skaičiai, nesidalijantys nei iš 2, nei iš 3. Turi būti tenkinama sąlyga

$$2^{2\alpha_1}3^{2\alpha_2}a_1^2 = 2^{3\beta_1+1}3^{3\beta_2}b_1^3 = 2^{5\gamma_1}3^{5\gamma_2+1}c_1^5,$$

kuri, turint omenyje, kad natūralųjį skaičių galima vieninteliu būdu užrašyti kaip pirminių skaičių laipsnių sandaugą, yra ekvivalenti lygybėms

$$2\alpha_1 = 3\beta_1 + 1 = 5\gamma_1, \qquad 2\alpha_2 = 3\beta_2 = 5\gamma_2 + 1 \quad \text{ir} \quad a_1^2 = b_1^3 = c_1^5.$$

Pastebėkime, kad $a_1 = b_1 = c_1 = 1$. Kitaip skaičių $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$ ir $\frac{c}{c_1}$, tenkinančių uždavinio sąlygą ($(2^{\alpha_1}3^{\alpha_2})^2 = 2(2^{\beta_1}3^{\beta_2})^3 = 3(2^{\gamma_1}3^{\gamma_2})^5$), sandauga $\frac{a}{a_1} \cdot \frac{b}{b_1} \cdot \frac{c}{c_1}$ turėtų mažiau daliklių nei abc. Mažiausia γ_1 reikšmė, tenkinanti gautas lygybes, yra 2 (tada $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 3$), o mažiausia γ_2 reikšmė — 1 (tada $\alpha_1 = 3$, $\beta_2 = 2$). Su didesniais γ_1 ar γ_2 (taigi ir su didesniais α_1, α_2, β_1, β_2) sandauga $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}$ turėtų daugiau daliklių, taigi rastosios reikšmės yra vienintelės tinkamos ir $abc = 2^{5+3+2}3^{3+2+1} = 2^{10}3^6$.
Skaičius bus abc daliklis tada ir tik tada, kai jis turės pavidalą $2^\alpha 3^\beta$, kur $0 \leqslant \alpha \leqslant 10$ ir $0 \leqslant \beta \leqslant 6$ yra sveikieji skaičiai. α gali įgyti 11 reikšmių, o β — 7 reikšmes, tad skaičius abc turi $11 \cdot 7 = 77$ daliklius.
Teisingas atsakymas **D**.

S29. Ⓒ

Pastebėkime, kad kai kuriuos skaičius į lentelę įrašyti yra neparankiau nei kitus. Visų pirma, lentelėje negali būti skaičiaus 1 (kitaip šio skaičiaus ir bet kurio iš jam gretimų skaičių didžiausias bendras daliklis lygus 1). Toliau pagal „ blogumą“ eina pirminiai skaičiai. Pvz., jei į lentelę įrašytas skaičius 11, jis joje turi mažiausiai du gretimus skaičius, kurie turi dalytis iš 11. Tie skaičiai gali būti 22, 33, 44 ir t. t.
Iš eilės tikrinkime pateiktus atsakymus. **A**) 21 netinka, nes neturime ko įrašyti greta penkių skaičių 1, 11, 13, 17 ir 19, tad negalime lentelėje rašyti jų pačių. Taip mums lieka $21-5=16$ skaičių, o jų reikia įrašyti visus 20. Panašiai netinka ir **B**) 24, nes čia turime 6 „blogus“ skaičius 1, 11, 13, 17, 19, 23, o lentelėn tegalime įrašyti daugiausiai $24-6=18$ skaičių.

Tikriname atsakymą **C**) 26. Atmetus „blogus“ skaičius 1, 11, 13, 17, 19, 23, lieka $26 - 6 = 20$ skaičių, kuriuos visus būtina surašyti į lentelę. Atkreipkime dėmesį į „pavojingus“ pirminius skaičius 5 ir 7 bei jų kartotinius, turinčius būti greta jų. Pamėginkime iš pradžių surašyti pirminius skaičius 3, 5, 7 į kampus, greta jų kitus nelyginius skaičius, o tada greta jų visus likusius lyginius, kurie vienas greta kito gali būti įrašomi bet kaip (žr. paveikslėlį). Lentelę įmanoma užpildyti!

7	14		25	5
21				15
				9
				3

→

7	14	20	25	5
21	18		10	15
24			12	9
			6	3

→

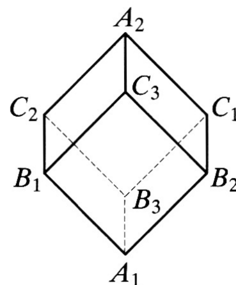
7	14	20	25	5
21	18	2	10	15
24	4	8	12	9
16	22	26	6	3

Renkamės atsakymą **C**.

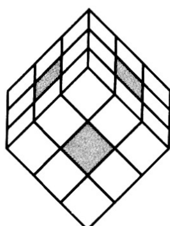
! Reikia įrodyti, kad didžiausioji reikšmė lentelėje negali būti mažesnė už 26. Akivaizdu, kad ji yra ne mažesnė už 20. Skaičius 21 ir 24 jau atmetėme **?** dalyje. Skaičius 20, 22, 23 ir 25 atmetame analogiškai.
Teisingas atsakymas **C**.

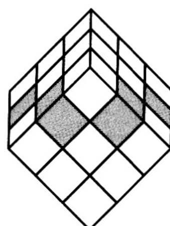
S30. ©

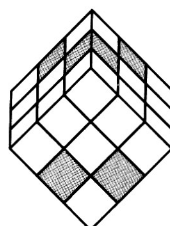
? Pažymėkime kubo viršūnes, kaip parodyta paveikslėlyje. Tegu įstrižainė, per kurios vidurį eina plokštuma, yra A_1A_2.
Nagrinėkime trikampius $A_1A_2B_1$ ir $A_1A_2B_2$. $A_1B_1 = A_1B_2 = 3$ (kaip kubo briaunos) ir $A_2B_1 = A_2B_2$ (kaip kubo sienų įstrižainės), todėl $\Delta A_1A_2B_1 = \Delta A_1A_2B_2$ (pagal tris lygias kraštines). Todėl jei trikampį $A_1A_2B_2$ suksime aplink tiesę A_1A_2, jis sutaps su trikampiu $A_1A_2B_2$. Kadangi sutaps kvadratų $A_2C_3B_1C_2$ ir $A_2C_1B_2C_3$ įstrižainės A_2B_1 ir A_2B_2, tai sutaps ir patys kvadratai, o sutapus šioms dviems kubo sienoms kubas pereis į save. Tada ir vienetiniai kubeliai pereis vienas į kitą.
Kubą galima pasukti ir taip, kad siena $A_2C_3B_1C_2$ pereitų į sieną $A_2C_2B_3C_1$.

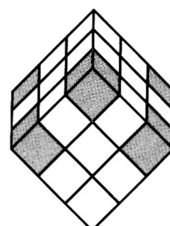


Be to, kubas pereis į save, jei jį atvaizduosime simetriškai kubo centro (t. y. atkarpos A_1A_2 vidurio) atžvilgiu — tada „susikeičia“ viršūnės A_1 ir A_2, B_1 ir C_1, B_2 ir C_2, B_3 ir C_3. Jei kartu su kubu suksime aplink tiesę A_1A_2 jai statmeną plokštumą ar kartu su kubu šią plokštumą simetriškai atvaizduosime jos taško — kubo centro — atžvilgiu, tai ši plokštuma taip pat pereis į save, todėl ir kubo bei plokštumos sankirta pereis į save. Kai atliekant šias transformacijas vienas vienetinis kubelis perėjo į kitą, tai plokštumos (galima) sankirta su pirmuoju kubeliu perėjo į plokštumos sankirtą su antruoju. Taigi plokštuma du tokius kubelius arba vienu metu kerta, arba vienu metu nekerta.
Nustatykime, kurie kubeliai gali pereiti vienas į kitą. Vidurinis kubo langelis, kuriame yra kubo centras, visada pereina pats į save. Tik į save arba vienas į kitą gali pereiti kiti du kubeliai, kuriuos kerta įstrižainė A_1A_2. Likę $27 - 3 = 24$ kubeliai išsiskaido į 4 aibes po 6 kubelius, kuriuos plokštuma arba visus kerta, arba nė vieno nekerta. Paveikslėlyje šių 4 aibių kubeliai nudažyti.


1 aibė


2 aibė


3 aibė

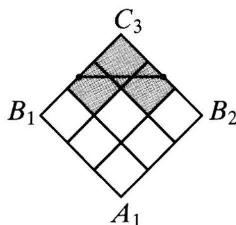

4 aibė

Iš trijų kubelių, per kuriuos eina įstrižainė A_1A_2, plokštuma kerta lygiai vieną — vidurinį, kuriam priklauso atkarpos A_1A_2 vidurys. Kitų dviejų kubelių plokštuma nekerta. Iš tiesų, jei plokštuma turėtų bendrą tašką su, tarkime, kubeliu, turinčiu viršūnę A_1, tai atstumas nuo to taško iki taško A_1 būtų ne mažesnis už atstumą nuo taško A_1 iki plokštumos. Tačiaus šis atstumas yra lygus pusei didžiojo kubo įstrižainės, o didžiausias atstumas tarp kubelio taškų yra lygus kubelio įstrižainei, t. y. tik trečdaliui didžiojo kubo įstrižainės. Vadinasi, kubelių, kuriuos plokštuma kerta, kiekis yra lygus 1, $1+6$, $1+2\cdot 6$, $1+3\cdot 6$ arba $1+4\cdot 6$ — priklausomai nuo to, kelių šešiaelemenčių aibių kubeliai yra jos kertami. Tinka tik atsakymas **C**.

Renkamės atsakymą **C**.

! Nustatysime, kiek tiksliai kubelių kerta plokštuma.

Kadangi taškai B_1 ir C_2 yra vienodai nutolę nuo nagrinėjamos plokštumos, tai plokštuma eina per kubo kraštinės B_1C_2 vidurio tašką. Analogiškai plokštumai priklauso ir kraštinių B_1C_3, B_2C_3, B_2C_1, C_1B_3 ir B_3C_2 vidurio taškai. Vadinasi, ir atkarpos, jungiančios tuos taškus, priklauso plokštumai. Bet tada plokštuma kerta kubelius, per kurių sienas eina tos atkarpos (žr. paveikslėlį).



Taigi plokštuma kerta 2 ir 4 aibių kubelius.

Kadangi plokštuma kerta didžiojo kubo sienas, tai ji kerta ir vidurinio kubelio sienas, per kurio centrą statmenai jo įstrižainei eina. Tačiau to kubelio sienos yra kartu ir 1 aibės kubelių sienos. Vadinasi, plokštuma kerta ir 1 aibės kubelius.

3 aibės kubelių plokštuma nekerta. Iš tiesų, tarkime, kad plokštuma kerta tokį kubelį (pvz., tą, kurio sienos yra didžiojo kubo sienose $A_2C_2B_1C_3$ ir $A_2C_3B_2C_1$). Atstumas nuo taško A_2 iki to kubelio taško, priklausančio plokštumai, yra ne mažesnis už atstumą nuo taško A_2 iki plokštumos, lygų pusei didžiojo kubo įstrižainės.

Raskime kubo įstrižainės A_1A_2 ilgį. Pritaikome Pitagoro teoremą trikampiams $A_1B_2C_1$ ir $A_1A_2C_1$:

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + B_2C)_1^2} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2};$$

$$A_1A_2 = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1A_2^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2+3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Vadinasi, atstumas nuo taško A_2 iki mūsų pasirinkto 3 aibės kubelio tam tikro taško yra ne mažesnis už $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Pasirinktas 3 aibės kubelis kartu su kubeliu, kurio vieno viršūnė yra A_2, sudaro stačiakampį gretasienį $2\times 1\times 1$, ir didžiausias galima atstumas nuo A_2 iki pasirinkto kubelio taško yra lygus šio gretasienio įstrižainės ilgiui. Jį galime rasti, kaip ir didžiojo kubo įstrižainės ilgį, dukart pritaikę Pitagoro teoremą. Įstrižainės ilgis yra $\sqrt{6}$. Taigi $\sqrt{6} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$, arba $6 \geqslant \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$. Gavome prieštarą — 3 aibės kubeliai nėra kertami plokštumos.

Iš viso plokštuma kerta $1+6+6+6=19$ kubelių.

Teisingas atsakymas **C**.

ATSAKYMAI

Klausimo Nr.	Grupė	
	J	**S**
1	B	A
2	C	B
3	D	A
4	A	C
5	D	D
6	C	C
7	D	C
8	C	C
9	C	C
10	E	B
11	B	D
12	B	E
13	A	D
14	B	D
15	A	B
16	D	A
17	D	E
18	D	D
19	C	A
20	B	B
21	C	B
22	C	C
23	B	A
24	B	A
25	B	D
26	D	B
27	B	C
28	C	D
29	C	C
30	E	C